Esercitazione sui numeri complessi

Operazioni di base

1) $-2i\left(3i\left(-2i\right)\right)=12i^3=-12i$

2) $2i\left(-3i\right)+3i\cdot i^3+\left(3i\right)^2=3i\left(-2i+i^3+3i\right)=3i\left(-2i-i+3i\right)=3i\cdot 0=0$

3) $11i^7+i\left(4i\right)^2-\left(3i\right)^3=11i^4\cdot i^3+i\left(16i^2\right)-\left(27i^3\right)=11\cdot 1\cdot\left(-i\right)+i\left(-16\right)-\left(-27i\right)=\left(-11-16+27\right)i=0$

4) Nel numero complesso

$11i^{2015}+30i^{5102}+41i^{5201}+ki^{5012}$,

determinare il valore reale di k in modo che il numero sia immaginario puro.

Risposta: k=30

Soluzione

$$11i^{2015}+30i^{5102}+41i^{5201}+ki^{5012}=11i^{4\cdot 503+3}+30i^{4\cdot 1275+2}+41i^{4\cdot 1300+1}+ki^{4\cdot 1253}=$$
$$11\left(i^4\right)^{503}\cdot i^3+30\left(i^4\right)^{1275}\cdot i^2+41\left(i^4\right)^{1300}\cdot i+k\left(i^4\right)^{1253}=11i^3+30i^2+41i+k=-11i-30+41i+k=k-30+30i$$

Il numero ottenuto è immaginario puro solo se k=30 ed il numero è 30i.

*** ***

5) $\dfrac{1+4i}{i}+\dfrac{1}{3-i}=\dfrac{\left(1+4i\right)\left(-i\right)}{i\left(-i\right)}+\dfrac{1\left(3+i\right)}{\left(3-i\right)\left(3+i\right)}=\dfrac{-i+4}{1}+\dfrac{3+i}{3^2-i^2}=4-i+\dfrac{3}{10}+\dfrac{3}{10}i=\dfrac{43}{10}-\dfrac{7}{10}i$

6) $\dfrac{1+2i^2+3i^3}{\left(2+i\right)^2}=\dfrac{1+2\left(-1\right)+3i\left(-1\right)}{4+4i+i^2}=\dfrac{-1-3i}{3+4i}\cdot\dfrac{3-4i}{3-4i}=\dfrac{-3+4i-9i+12i^2}{9-16i^2}=\dfrac{-15-5i}{25}=-\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{5}i$

Esercizi con la presenza di un parametro

7) Nel numero complesso $z=\left(5+ki\right)^2$ determinare per quali valori reali di k il numero è immaginario puro.

Risposta: $k=\pm 5$

Soluzione

$$\left(5+ki\right)^2=25+10ki+k^2i^2=25-k^2+10ki$$

Il numero è immaginario puro se e solo se $k=\pm 5$. I due numeri corrispondenti sono $z_1=50i$, $z_2=-50i$.

*** ***

8) Stabilire se esistono valori reali di k per i quali il numero complesso $z=\dfrac{1+3i}{1+ki}$ è reale.

Risposta: Con k=3, si ha z=1

Soluzione

Si deve ridurre il numero complesso alla forma algebrica $a+ib$, quindi stabilire se il coefficiente della parte immaginaria b può essere nullo.

$z=\frac{1+3i}{1+ki}=\frac{1+3i}{1+ki}\cdot\frac{1-ki}{1-ki}=\frac{1+3k}{1+k^2}+i\frac{3-k}{1+k^2}$ Il numero diventa reale se e solo se risulta $3-k=0$, quindi se $k=3$. Il numero z reale corrispondente è: $z=1$

*** ***

9) Considerato il numero complesso $z=\frac{3-ki}{k+i}$, con k parametro reale, stabilire se esistono valori di k tali che:

a) z sia un numero reale;
b) z sia un numero immaginario puro;
c) Il modulo z sia $\sqrt{5}$.

Risposte a) nessun valore reale di k; b) k=0 e si ha z=-3i; c) k=±1 e si hanno i numeri $z_1=1-2i$, $z_2=-1-2i$.

Soluzione

a. Riduciamo il numero complesso alla forma algebrica.

$\frac{3-ki}{k+i}=\frac{3-ki}{k+i}\cdot\frac{k-i}{k-i}=\ldots=\frac{2k}{k^2+1}-\frac{k^2+3}{k^2+1}i$ Dalla forma ottenuta si evince che il numero complesso non può diventare reale per alcun valore di k reale perché per ogni valore reale di k il coefficiente della parte immaginaria è diverso da zero.

b. Il numero complesso diventa immaginario puro per k=0; il corrispondente numero complesso è z=-3i.

c. Il modulo del numero complesso è $|z|=\left|\frac{2k}{k^2+1}-\frac{k^2+3}{k^2+1}i\right|=\frac{\sqrt{4k^2+\left(k^2+3\right)^2}}{k^2+1}$

Imponendo che il modulo sia $\sqrt{5}$ si ottiene l'uguaglianza

$$\frac{\sqrt{4k^2+\left(k^2+3\right)^2}}{k^2+1}=\sqrt{5}\rightarrow k^4+10k^2+9=5\left(k^4+2k^2+1\right)\rightarrow k^4=1\rightarrow k=\pm1$$

Esistono dunque due numeri complessi che hanno la proprietà richiesta e sono

$z_1=1-2i$, $z_2=-1-2i$.

*** ***

10) Considerati i numeri complessi $z_1 = 1 - \frac{1}{1+i}$, $z_2 = k + i$ determinare per quali valori del parametro reale k il prodotto il prodotto $z_1 z_2$ è reale o immaginario puro.

Risposta $z_1 z_2$ è reale per k=-1; $z_1 z_2$ è immaginario puro per k=1

Soluzione

Semplifichiamo l'espressione di z_1 ed eseguiamo il prodotto risudendolo alla forma algebrica.

$$z_1 = 1 - \frac{1}{1+i} = = \frac{i}{1+i} = \frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i .$$

$$z_1 z_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)(k+i) = \ldots = \frac{k-1}{2} + \frac{k+1}{2}i$$

Il risultato è un numero reale per k=-1 e risulta $z_1 z_2 = -1$; il risultato è immaginario puro per k=1 e risulta $z_1 z_2 = i$.