

Progetto: Riuscire nelle gare di Matematica

Test d'ingresso: 5 Febbraio 2010

Cognome _____

Nome _____

Classe _____

Sezione _____

Tempo concesso 120 minuti

Non è consentito l'utilizzo della calcolatrice

ARITMETICA

1. Tra i seguenti numeri individuare quelli divisibili per 22:
4257, 8514, 154, 231, 462, 209, 1254.
2. Valutare il valore di verità delle seguenti disuguaglianze numeriche
 - a) $3,6 > 3,\overline{6}$ V F
 - b) $2^{5^2} < 2^{5^3}$ V F
 - c) $\left(\frac{16}{9}\right)^3 > \left(\frac{24}{12}\right)^2$ V F
 - d) $\frac{4}{3} < 1,\overline{74}$ V F
3. In una classe di 25 alunni, l'80% partecipa a una gita scolastica. Di questi il 75% porta il pranzo al sacco. Quanti ragazzi pranzano al sacco?
Quale percentuale degli alunni della classe rappresentano?
Risposta.....
4. Il M.C.D. di due numeri naturali è 2 e il loro m.c.m. è 60. Se si moltiplicano entrambi i numeri per 2, quanto vale il loro M.C.D. ? Se si moltiplica il primo per 11 e il secondo per 7, di quanto aumenta il loro m.c.m. ?
Risposta.....

ALGEBRA

1. Dato un numero z, intero dispari, determina la somma di tale numero con l'intero dispari che lo precede e con l'intero pari successivo. In modo analogo, dato un numero y, intero pari, calcola la somma di tale numero con il suo triplo e con l'intero pari successivo. I risultati ottenuti rappresentano numeri pari o dispari?
Risposta.....
2. Sono dati i seguenti polinomi:
 $3x^m - 7x^{m-2} + 3x^{m-3}$ ($m \in \mathbb{N}, m \geq 3$) e
 $y^{n-2} + 5y^{n-4} - 11$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 4$)
 - a) Per quale valore di m il primo polinomio ha il termine noto non nullo?
 - b) Per quale valore di n il secondo polinomio è di sesto grado?
 - c) Quale relazione deve sussistere tra m ed n, affinché i due polinomi siano dello stesso grado?Risposta.....
3. Calcolare il valore della seguente espressione per $a = 0,\overline{3}$:

$$\left(\frac{1}{2} - 3a + \frac{1}{4}a^2\right)^2 - a$$

Risposta.....

4. Determinare M.C.D. e m.c.m. dei seguenti monomi a^3b^n e $a^{n-2}b^2$, con $n \geq 2$.

Risposta.....

5. Stabilire il valore di verità delle seguenti uguaglianze e disuguaglianze:

a) $\frac{a^2-1}{a+1} = a-1$ V F

b) $a - \frac{1}{a-1} > 1$, con $0 < a < 1$ V F

6. Stabilire se la seguente divisione $(1-x^3):(x+1)$ è esatta. Calcolarne quoziente e resto.

Risposta.....

GEOMETRIA

1. Nel triangolo ABC indichiamo con α, β, γ le misure della ampiezze degli angoli rispettivamente nei vertici A, B, C e con a, b, c le misure dei lati opposti agli stessi. Sapendo che $a = 12 \text{ cm}$, $b = 6 \text{ cm}$, $\alpha = 90^\circ$ determinare gli angoli β e γ , il perimetro e l'area del triangolo. Se si conduce, l'altezza AH relativa al lato BC , in che rapporto stanno l'area del triangolo AHC e quella del triangolo ABC ?

Risposta.....

2. Dato un quadrato $ABCD$ si uniscono i punti medi dei lati aventi un vertice in comune formando un nuovo quadrato $EFGH$. Ripetiamo la stessa operazione per $EFGH$ e otteniamo un nuovo quadrato $A'B'C'D'$. Quanto vale il rapporto tra l'area di $ABCD$ e l'area di $A'B'C'D'$.

- a) 2;
- b) $2\sqrt{2}$;
- c) 4;
- d) $4\sqrt{2}$;
- e) 8.

3. Nel triangolo ABC si tracci la mediana CH relativa al lato AB e dal vertice A la mediana AH' relativa a CH . Quale è il rapporto tra l'area del triangolo AHH' e l'area del triangolo ABC ?

Risposta.....

4. Considerato il rettangolo $ABCD$ di base $AB = a$ e altezza $AD = b$, preso un punto P su AB e considerato P' la sua proiezione su DC , stabilire quanto deve valere PB affinché il rapporto tra l'area del rettangolo $PBCP'$ e quella del rettangolo $APP'D$ sia $\frac{1}{4}$.

Risposta.....

LOGICA

1. In una scuola di 1200 studenti gli sport maggiormente eseguiti sono basket, calcio e pallavolo. Si sa che:
 320 eseguono tutti e 3 gli sport;
 440 si interessano di basket e pallavolo;
 360 calcio e pallavolo;
 400 calcio e basket;
 500 pallavolo;
 500 calcio;
 600 basket.
 Determina quanti ragazzi seguono solo il basket e quanti solo la pallavolo.
 Quanti ragazzi si interessano di calcio e di basket, ma non di pallavolo.
 Infine, determina quanti ragazzi non hanno nessun interesse sportivo.
 Risposta.....

Soluzioni dei quesiti

ARITMETICA

1. Un numero è divisibile per 22 se è divisibile per 2 e per 11. Pertanto applicando il criterio di divisibilità per 11 (un numero è divisibile per 11 se la differenza (presa in valore assoluto), fra la somma delle cifre di posto pari e la somma delle cifre di posto dispari, è 0, 11 o un multiplo di 11) ai numeri pari dell'elenco si ha che i numeri divisibili per 22 sono: 8514, 154, 462, 1254.
2. Si verifica facilmente che la sequenza corretta dei valori di verità è la seguente: F, V, V, V.
3. I ragazzi che partecipano alla gita scolastica, rappresentando l'80% del totale di 25 alunni, sono 20; quelli che pranzano al sacco che rappresentano il 75% dei ragazzi in gita sono 15. Quest'ultimi rappresentano il 60% del totale degli alunni della classe.
4. Se si moltiplicano entrambi i numeri per 2 il loro M.C.D. diventa 4, in quanto in entrambe le scomposizioni in fattori primi ci sarà il fattore 4. Se si moltiplica il primo per 11 e il secondo per 7, nel m.c.m. bisogna tener conto dei due nuovi fattori, pertanto il m.c.m. sarà 4620 che è il precedente aumentato di 4560.

ALGEBRA

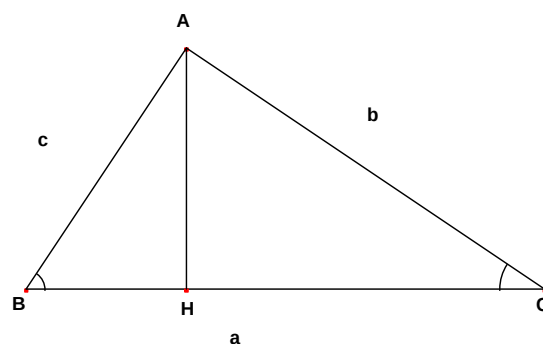
1. Sia z un intero dispari, la somma di tale numero con l'intero dispari che lo precede e con l'intero pari successivo è $z + z - 2 + z + 1 = 3z - 1$ che è un numero pari in quanto moltiplicando un numero dispari per 3 si ha ancora un numero dispari e sottraendo 1 a tale numero si ha un numero pari. Inoltre, dato un numero y , intero pari, la somma di tale numero con il suo triplo e con l'intero pari successivo è $z + 3z + z + 2 = 5z + 2$ che è un numero pari in quanto moltiplicando un numero pari per 5 si ha ancora un numero pari e sommando 2 a tale numero si ha ancora un numero pari.
2. Il polinomio $3x^m - 7x^{m-2} + 3x^{m-3}$, con $m \in \mathbb{N}$ e $m \geq 3$ ha termine noto non nullo se $m - 3 = 0$, cioè per $m = 3$, mentre il polinomio $y^{n-2} + 5y^{n-4} - 11$, con $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 4$ è di sesto grado se $n - 2 = 6$, cioè per $n = 8$. Infine, i due polinomi sono dello stesso grado se $m = n - 2$.

3. Per calcolare il valore dell'espressione

$$\left(\frac{1}{2} - 3a + \frac{1}{4}a^2\right)^2 - a, \text{ per } a = 0, \overline{3} \text{ basta sostituire ad } a \text{ il valore di } \frac{1}{3} \text{ e si ottiene } -\frac{143}{1296}.$$

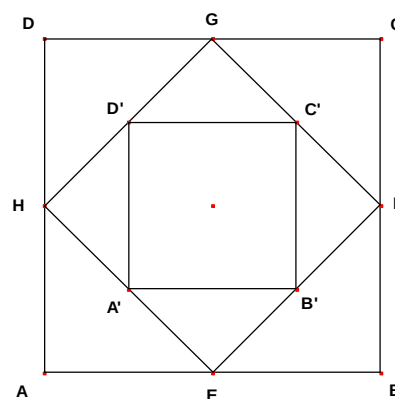
4. Confrontando gli esponenti letterali e applicando le definizioni si ha che: se $2 \leq n \leq 5$ il M.C.D. e il m.c.m. dei monomi a^3b^n e $a^{n-2}b^2$ sono rispettivamente $a^{n-2}b^2$ e a^3b^n , mentre se $n > 5$ sono rispettivamente a^3b^2 e $a^{n-2}b^n$.
5. La prima uguaglianza è falsa in quanto mancano le condizioni di esistenza, per quanto riguarda la seconda con semplici considerazioni algebriche si verifica che è vera.
6. Applicando il Teorema del resto si ha che la divisione ha resto 2, quindi non è esatta. Eseguendo la divisione con la Regola di Ruffini il quoziente è il polinomio $-x^2 + x - 1$.

GEOMETRIA

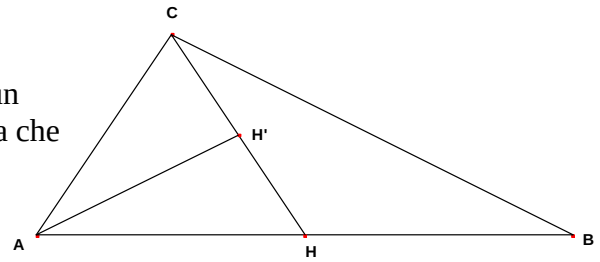


1. Indicate con α, β, γ le misure della ampiezze degli angoli rispettivamente nei vertici A, B, C ed essendo il triangolo rettangolo e $a = 12 \text{ cm}$ e $b = 6 \text{ cm}$, segue che $\beta = 30^\circ$ e $\gamma = 60^\circ$, mentre applicando il Teorema di Pitagora risulta $c = 6\sqrt{3}$. Moltiplicando il prodotto dei cateti e dividendo per due e sommando i tre lati si ottiene che l'area e il perimetro sono rispettivamente $18\sqrt{3} \text{ cm}^2$ e $(18 + 6\sqrt{3}) \text{ cm}$. Tracciando l'altezza AH relativa al lato BC , risulta $AH = 3\sqrt{3} \text{ cm}$ e $BH = 9 \text{ cm}$, per considerazioni analoghe alle precedenti, pertanto l'area del triangolo AHC è $\frac{27}{2}\sqrt{3} \text{ cm}^2$ e il rapporto con quella del triangolo ABC risulta di $\frac{3}{4}$.

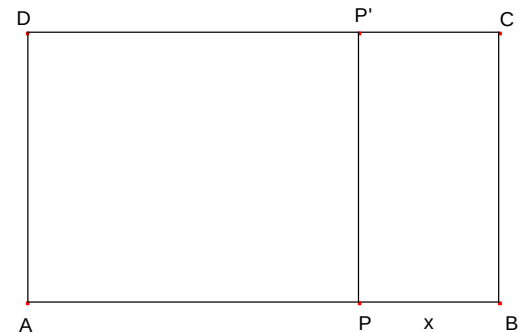
2. Indicato $AB = x$ l'area del quadrato $ABCD$ è x^2 , inoltre si verifica facilmente che $EF = \frac{x}{2}\sqrt{2}$ e $A'B' = \frac{x}{2}$ quindi l'area del quadrato $A'B'C'D'$ è $\frac{x^2}{4}$ e il rapporto tra l'area di $ABCD$ e l'area di $A'B'C'D'$ è 4.



3. Ricordando che in un triangolo la mediana relativa ad un lato divide il triangolo in due triangoli equi estesi, si ha che indicata con x l'area di ABC , l'area di ACH sarà $\frac{x}{2}$ e quella di AHH' $\frac{x}{4}$. Pertanto il rapporto tra l'area del triangolo AHH' e l'area del triangolo ABC è $\frac{1}{4}$.



4. Indicato $PB = x$ si ha che $AP = a - x$, pertanto l'area del rettangolo $PBCP'$ è xb e quella del rettangolo $APP'D$ è $(a - x)b$. Pertanto imponendo che il rapporto tra le due aree deve essere $\frac{1}{4}$ si ha che $PB = \frac{a}{5}$.



LOGICA

1. Schematizzando graficamente i dati si ha la seguente rappresentazione.
Pertanto: 80 ragazzi seguono solo il basket, 20 solo la pallavolo, 80 si interessano di calcio e di basket, ma non di pallavolo e 480 non hanno nessun interesse sportivo.

