

Radicali algebrici in R

Trasformazione dell'indice e dominio di definizione

1) $\sqrt[3]{2x-3}$

Dopo aver determinato il dominio di definizione, trasformare il radicale in modo che abbia indice 6

2) $\sqrt[3]{x-1} + \frac{2}{\sqrt{x-1}}$

Determinare il dominio di definizione dell'espressione.

3) $\sqrt{2-x} - \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x+1}$

Determinare il dominio di definizione dell'espressione

4) $\frac{x}{\sqrt{x^2-4}} - \sqrt{1-x}$

Determinare il dominio di definizione dell'espressione

5) $\sqrt[4]{-x^3-x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

Determinare il dominio di definizione dell'espressione

6) $\frac{x}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

Determinare il dominio di definizione dell'espressione

7) $\sqrt{\frac{xy}{\sqrt{x}}}$

Precisare la variabilità di x ed y in R e trasformare il radicale in modo che figuri una sola radice.

8) $\sqrt{a\sqrt{ax}} : \sqrt[3]{x}$

Precisare la variabilità dei parametri a ed x in R, quindi semplificare l'espressione.

9) $\frac{1}{x\sqrt{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}$

Definire la variabilità di x ed y in R e ridurre l'espressione ad una sola frazione.

10) Considerati i radicali $\sqrt[4]{x^2}$, $\sqrt[3]{xy^2}$, $\sqrt[6]{x^2y}$, determinare gli insiemi di variabilità di x ed y in R e ricondurli al minimo comune indice.

Soluzione

1) $\sqrt[3]{2x-3}$ Il radicale è definito per ogni x reale e assume valore negativo per $x < \frac{3}{2}$ e

valore non negativo per $x \geq \frac{3}{2}$. La trasformazione richiesta relativamente all'indice è la seguente

$$\sqrt[3]{2x-3} = \begin{cases} -\sqrt[6]{(2x-3)^2} & \text{per } x < \frac{3}{2} \\ \sqrt[6]{(2x-3)^2} & \text{per } x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

2) $\sqrt[3]{x-1} + \frac{2}{\sqrt{x-1}}$

Il radicale di indice dispari è definito per ogni x reale mentre la frazione è definita solo per i valori di x tali che $x-1 > 0$. Concludiamo che l'insieme di definizione dell'intera espressione è l'intervallo $]1; +\infty[$.

3) $\sqrt{2-x} - \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x+1}$

L'espressione è definita per i valori reali della variabile x che verificano il seguente sistema

$$\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{Il sistema ammette come insieme delle soluzioni l'intervallo } S = [-1; 2], \text{ che}$$

rappresenta perciò il dominio di definizione dell'intera espressione.

4) $\frac{x}{\sqrt{x^2-4}} - \sqrt{1-x}$ Il dominio di definizione dell'espressione è l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x^2-4 > 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \quad \text{L'insieme è } S =]-\infty; -2[$$

5) $\sqrt[4]{-x^3-x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ I due radicali presenti hanno indice pari e dunque i loro radicandi

devono essere non negativi. Poiché $\sqrt{x}$ è presente al denominatore dovrà in particolare risultare $x > 0$. Il dominio di definizione dell'espressione è l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} -x^3-x \geq 0 \\ x > 0 \end{cases}, \text{ che diventa } \begin{cases} x(x^2+1) \leq 0 \\ x > 0 \end{cases}. \text{ Le due disequazioni sono incompatibili e dunque}$$

l'espressione algebrica in esame non esiste per alcun valore reale della variabile. Dominio: $\emptyset$.

6) $\frac{x}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

L'insieme di definizione dell'espressione coincide con l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 1-x > 0 \end{cases}, \text{ da cui } \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 1 \end{cases}. \text{ Il dominio è l'insieme } S = [0;1[.$$

7) $\sqrt{\frac{xy}{\sqrt{x}}}$

Osserviamo che per la presenza di $\sqrt{x}$ al denominatore deve risultare $x > 0$. Poiché deve risultare anche $\frac{xy}{\sqrt{x}} \geq 0$, si deduce che deve risultare $y \geq 0$. Con dette condizioni il radicale si elabora come segue

$$\sqrt{\frac{xy}{\sqrt{x}}} = \sqrt{\sqrt{x} \cdot y} = \sqrt{\sqrt{xy^2}} = \sqrt[4]{xy^2}, \forall x > 0 \text{ e } \forall y \geq 0.$$

8) $\sqrt{a\sqrt{ax}} : \sqrt[3]{x}$

Le condizioni per l'esistenza dell'espressione radicale sono

$a \geq 0$, $ax \geq 0$ e $x \neq 0$, che forniscono $a \geq 0$ e $x > 0$.

Il radicale si elabora con i seguenti interventi:

- trasportando il fattore a presente nel radicale più esterno sotto al radicale più interno;
- applicando la regola sull'indice per la radice di radice;
- riducendo i due radicali allo stesso indice;
- eseguendo il quoziente tra i due radicali.

Elaborazioni

$$\sqrt{a\sqrt{ax}} : \sqrt[3]{x} = \sqrt{\sqrt{a^3x}} : \sqrt[3]{x} = \sqrt[4]{a^3x} : \sqrt[3]{x} = \sqrt[12]{(a^3x)^3} : x^4 = \sqrt[12]{a^9x^3} : x^4 = \sqrt[12]{\frac{a^9}{x}}$$

9) $\frac{1}{x\sqrt{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}$ Definire la variabilità di x ed y e ridurre l'espressione ad una sola frazione.

Osserviamo che x ed y devono essere entrambi diversi da zero per l'esistenza della prima frazione; inoltre, dalla stessa frazione, segue che deve risultare $y > 0$. La frazione radicando del secondo radicale deve assumere valore non negativo, perciò x ed y devono essere concordi e poiché $y > 0$ dovrà essere anche $x > 0$. In conclusione le condizioni di esistenza (C.E.) per l'intera espressione sono $x > 0$ e $y > 0$.

Elaborazioni

$$\frac{1}{x\sqrt{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{1}{x\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \frac{1 + \sqrt{x}(\sqrt{y})^2}{x\sqrt{y}} = \frac{1 + y\sqrt{x}}{x\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y} + y\sqrt{xy}}{xy}$$

10) $\sqrt[4]{x^2}$, $\sqrt[3]{xy^2}$, $\sqrt[6]{x^2y}$

Osserviamo che il primo radicale esiste $\forall x \in \mathbb{R}$ e si può semplificare; si ottiene

$$\sqrt[4]{x^2} = \sqrt[4]{|x|^2} = \sqrt{|x|}$$

Il **secondo radicale è irriducibile** ed esiste $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall y \in \mathbb{R}$.

Il **terzo radicale è irriducibile** ed esiste $\forall x \in \mathbb{R}$ e solo per $y \geq 0$.

Concludiamo che **l'esistenza contemporanea dei tre radicali si verifica $\forall x \in \mathbb{R}$ e per $y \geq 0$.**

Riduzione al minimo comune indice

Il minimo comune indice per i tre radicali $\sqrt{|x|}$, $\sqrt[3]{xy^2}$, $\sqrt[6]{x^2y}$ è 6, quindi il terzo radicale non deve essere trasformato.

Il primo radicale diventa $\sqrt{|x|} = \sqrt[6]{|x|^3}$.

Il secondo radicale, avendo indice dispari, con $x < 0$ e $y \neq 0$ assume valori negativi. Poiché riconducendolo all'indice 6 il suo radicando sarà elevato al quadrato, è necessario distinguere il caso $x < 0$ dal caso $x \geq 0$. Si ha:

$$\sqrt[3]{xy^2} = \begin{cases} \sqrt[6]{x^2y^4} & \text{con } x \geq 0 \\ -\sqrt[6]{x^2y^4} & \text{con } x < 0 \end{cases}$$