

Radicali algebrici in R

Ridurre al minimo comune indice i radicali di ciascun gruppo

1) $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[6]{x(x^2+1)}$, $\sqrt[4]{4-x}$

2) $\sqrt[4]{x+1}$, $\sqrt[3]{3-x}$, $\sqrt{x-2}$

3) $\sqrt[3]{\frac{x}{y^2}}$, $\sqrt{6-x}$, $\sqrt{y+2}$

4) $\sqrt[5]{-xy}$, $\sqrt{\frac{x}{y}}$, $\sqrt[4]{\frac{y^2}{x}}$

5) $\sqrt[8]{4a^2x^4}$, $\sqrt[4]{-ax}$, $\sqrt{\frac{x}{a}}$

Soluzione

1) $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[6]{x(x^2+1)}$, $\sqrt[4]{4-x}$

I tre radicali sono irriducibili. Il primo radicale esiste per ogni x reale, il secondo per ogni $x \geq 0$ ed il terzo per ogni $x \leq 4$. Pertanto i tre radicali esistono contemporaneamente solo nell'intervallo $[0;4]$ nel quale sussistono le operazioni di trasformazione degli indici. Osserviamo che nell'intervallo indicato tutti i radicali assumono valori non negativi.

Il minimo comune indice cui ridurre i radicali è 12. I tre radicali diventano

$$\sqrt[3]{x} = \sqrt[12]{x^4}, \quad \sqrt[6]{x(x^2+1)} = \sqrt[12]{x^2(x^2+1)^2}, \quad \sqrt[4]{4-x} = \sqrt[12]{(4-x)^3}, \quad \forall x \in [0;4]$$

2) $\sqrt[4]{x+1}$, $\sqrt[3]{3-x}$, $\sqrt{x-2}$

I tre radicali sono irriducibili.

Insieme di definizione

Il primo radicale esiste per $x \geq -1$, il secondo radicale esiste per ogni x reale, il terzo radicale esiste per ogni $x \geq 2$. Concludiamo che i tre radicali esistono contemporaneamente per ogni $x \geq 2$. Nell'intervallo di definizione i due radicali quadratici assumono valori non negativi, mentre il radicale cubico assume valore non negativo per $2 \leq x \leq 3$ e valore negativo per $x > 3$.

Il minimo comune indice cui ridurre i tre radicali è 12. Per il radicale cubico è necessario distinguere i due casi : $2 \leq x \leq 3$ e $x > 3$. Si hanno le seguenti espressioni:

$$\sqrt[4]{x+1} = \sqrt[12]{(x+1)^3}, \quad \sqrt[3]{3-x} = \begin{cases} \sqrt[12]{(3-x)^4} & \text{per } 2 \leq x \leq 3 \\ -\sqrt[12]{(3-x)^4} & \text{per } x > 3 \end{cases}, \quad \sqrt{x-2} = \sqrt[12]{(x-2)^6}$$

$$3) \sqrt[3]{\frac{x}{y^2}}, \sqrt{6-x}, \sqrt{y+2}$$

Il radicale cubico esiste per ogni x reale e per ogni $y \neq 0$; assume valore non negativo per $x \geq 0$ e valore negativo per $x < 0$.

Il radicale $\sqrt{6-x}$ è definito per ogni $x \leq 6$ ed assume valore non negativo.

Il radicale $\sqrt{y+2}$ è definito per ogni $y \geq -2$ ed assume valore non negativo.

Si conclude che per la coesistenza dei tre radicali deve risultare $x \leq 6$ e $(y \geq -2) \wedge (y \neq 0)$.

I tre radicali sono irriducibili per cui il minimo comune indice cui ridurli è 6. Sussistono le seguenti trasformazioni:

$$\sqrt[3]{\frac{x}{y^2}} = \begin{cases} \sqrt[6]{\left(\frac{x}{y^2}\right)^2} & \text{per } 0 \leq x \leq 6 \\ -\sqrt[6]{\left(\frac{x}{y^2}\right)^2} & \text{per } x < 0 \end{cases}, \quad \sqrt{6-x} = \sqrt[6]{(6-x)^3}, \quad \sqrt{y+2} = \sqrt[6]{(y+2)^3}$$

$$4) \sqrt[5]{-xy}, \sqrt{\frac{x}{y}}, \sqrt[4]{\frac{y^2}{x}}$$

Il primo radicale esiste quali che siano i valori reali per x ed y .

Il secondo radicale richiede che sia $y \neq 0$ e che x ed y siano concordi in modo che il rapporto sia positivo, oppure che sia $x=0$ e $y \neq 0$.

Il terzo radicale richiede che sia $x > 0$.

I tre radicali esistono contemporaneamente per $x > 0$ e $y > 0$. Per detti valori il primo radicale assume valore negativo e gli altri due valori positivi.

Per la trasformazione al minimo comune indice si deve assumere come indice 20. Si ha

$$\sqrt[5]{-xy} = -\sqrt[20]{x^4 y^4}, \quad \sqrt{\frac{x}{y}} = \sqrt[20]{\frac{y^{10}}{x^{10}}}, \quad \sqrt[4]{\frac{y^2}{x}} = \sqrt[20]{\frac{y^{10}}{x^5}}$$

$$5) \sqrt[8]{4a^2 x^4}, \sqrt[4]{-ax}, \sqrt{\frac{x}{a}}$$

Osserviamo che **il primo radicale non è irriducibile**, per cui lo rendiamo tale. Si ha

$$\sqrt[8]{4a^2x^4} = \sqrt[8]{(2|a|x^2)^2} = \sqrt[4]{2|a|x^2}$$

Condizioni per l'esistenza: discussione

Per l'esistenza del primo radicale non si deve porre alcuna limitazione; esiste per ogni valore di x e per ogni valore di a .

Per l'esistenza del secondo radicale deve essere $ax \leq 0$.

Per il terzo radicale deve risultare $a \neq 0$ e x che sia nullo oppure che sia concorde con a .

Osserviamo che la condizione imposta dal secondo radicale, se a e x sono diversi da zero, implica che a ed x siano discordi e perciò contrasta con la richiesta che gli stessi fattori siano concordi, come richiesto dal terzo radicale. Pertanto a ed x non possono essere entrambi diversi da zero, almeno uno deve essere nullo. Poiché per il terzo radicale deve essere $a \neq 0$ si deduce che deve essere $x=0$. **I tre radicali esistono con $x=0$ e per $a \neq 0$ e assumono tutti valore nullo.** A questo punto è inutile trasformarli per ricondurli ad uno stesso indice.