

Equazioni Biquadratiche, Binomie, Trinomie

Scrivere un'equazione biquadratica avente tra le sue radici i valori:

$$x_1 = 3, x_2 = -\frac{1}{2}$$

2.2 Risolvere le seguenti equazioni

$$2.2.1 \quad 4x^4 + (4 - a^2)x^2 - a^2 = 0 \quad 2.2.2 \quad x^2(x+1)^2 - 10(x^2 + x) - 24 = 0$$

$$2.2.3 \quad 8x^5 - x^2 = 0 \quad 2.2.4 \quad x^4 + 25 = 0$$

Soluzione

2.1 Un'equazione biquadratica è di quarto grado e ridotta alla forma normale ha la seguente forma:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0;$$

essa ammette le radici a due a due opposte, quindi se $x_1 = 3, x_2 = -\frac{1}{2}$ sono due radici, lo

saranno anche i valori $x_3 = -3, x_4 = \frac{1}{2}$. Un'equazione che verifica la richiesta è la seguente

$$(x-3)(x+3)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$$

2.2.1 L'equazione in esame è biquadratica. Ponendo

$$x^2 = y \Rightarrow x^4 = (x^2)^2 = y^2$$

e dunque si passa all'equazione ausiliaria di secondo grado

$$4y^2 + (4 - a^2)y - a^2 = 0 \Rightarrow$$

$$y_1 = \frac{a^2}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{a^2}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{a}{2}, x_2 = -\frac{a}{2};$$

$$y_2 = -1 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x_3 = i, x_4 = -i.$$

2.2.2 L'equazione è trinomia. Infatti si può scrivere nella seguente forma

$$[x(x+1)]^2 - 10x(x+1) - 24 = 0$$

Ponendo $x(x+1) = y$ si risolve l'equazione ausiliaria di secondo grado

$$y^2 - 10y - 24 = 0 \Rightarrow y = 5 \pm \sqrt{25 + 24} = 5 \pm 7$$

e si hanno i due seguenti casi

$$a) y_1 = -2 \Rightarrow x(x+1) = -2 \Rightarrow x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow x_1^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2} \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2},$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2};$$

$$b) y_2 = 12 \Rightarrow x(x+1) = 12 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow x_3 = -4, x_4 = 3.$$

$$2.2.3 \quad 8x^5 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(8x^3 - 1) = 0$$

Applicando la legge di annullamento del prodotto si ricava

$$x^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0, \text{ oppure}$$

$$(8x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow (2x-1)(4x^2 + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow x_3 = \frac{1}{2}, x_4 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, x_5 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$2.2.4 \quad x^4 + 25 = 0 \Leftrightarrow x^4 + 2 \cdot 5x^2 + 25 - 2 \cdot 5x^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 5)^2 - (\sqrt{10}x)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x^2 + \sqrt{10}x + 5)(x^2 - \sqrt{10}x + 5) = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 + \sqrt{10}x + 5 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{10}}{2} - i\frac{\sqrt{10}}{2}, x_2 = -\frac{\sqrt{10}}{2} + i\frac{\sqrt{10}}{2};$$

$$x^2 - \sqrt{10}x + 5 = 0 \Rightarrow x_3 = \frac{\sqrt{10}}{2} - i\frac{\sqrt{10}}{2}, x_4 = \frac{\sqrt{10}}{2} + i\frac{\sqrt{10}}{2}$$