

Studio di un determinante

Nel seguente determinante del terzo ordine

$$\begin{vmatrix} a & 2a+c & 3c \\ a-1 & 3 & a-2b \\ a-b & b+c & -a \end{vmatrix}$$

dopo aver stabilito per quali valori dei parametrici a, b, c si verificano le seguenti uguaglianze

$$a_{12} = a_{21}; \quad a_{13} = a_{31}; \quad a_{23} = a_{32},$$

calcolare il valore del determinante corrispondente.

Soluzione

Ricordiamo che in un determinante ogni elemento è individuato dagli indici di riga e di colonna. L'elemento che si trova nell'intersezione della **riga i-sima** con la **colonna j-sima** è indicato con il simbolo a_{ij} . Per un determinante del terzo ordine la struttura algebrica è pertanto la seguente

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (1.1)$$

Ciò premesso, poiché nel determinante assegnato

$$\begin{vmatrix} a & 2a+c & 3c \\ a-1 & 3 & a-2b \\ a-b & b+c & -a \end{vmatrix} \quad (1.2)$$

devono essere soddisfatte le uguaglianze

$$a_{12} = a_{21}, \quad a_{13} = a_{31}, \quad a_{23} = a_{32},$$

i valori dei parametri a, b, c dovranno essere soluzioni del seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} 2a+c=a-1 \\ 3c=a-b \\ a-2b=b+c \end{cases} \quad \text{che ridotto alla forma normale diventa:} \quad \begin{cases} a+c=-1 \\ a-b-3c=0 \\ a-3b-c=0 \end{cases}$$

Il sistema ottenuto si può risolvere facilmente con il metodo di sostituzione.

$$\begin{cases} c=-a-1 \\ a-b-3(-a-1)=0 \\ a-3b-(-a-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-a-1 \\ 4a-b=-3 \\ 2a-3b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-a-1 \\ b=4a+3 \\ 2a-3(4a+3)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-a-1 \\ b=4a-3 \\ -10a=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{4}{5} \\ b=-\frac{1}{5} \\ c=-\frac{1}{5} \end{cases}$$

Sostituendo i valori ottenuti per i parametri nel determinante (1.2), dopo aver eseguito le operazioni algebriche presenti, si perviene al seguente determinante

$$\begin{vmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{9}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{9}{5} & 3 & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{vmatrix} \quad (1.3)$$

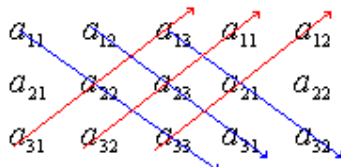
Calcolo del determinante

Il valore di un determinante D del terzo ordine è

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

Detto valore si può agevolmente ottenere ricorrendo alla regola di Sarrus che sfrutta la seguente tabella



I primi tre prodotti sono ottenuti moltiplicando gli elementi che si trovano sulle diagonal discendenti (colorate in blu), mentre i tre prodotti del secondo gruppo si ottengono dagli elementi che si trovano sulle diagonal ascendenti (colorate in rosso).

Per il determinante in questione si ha:

$$\begin{vmatrix} 4 & 9 & 3 \\ -\frac{4}{5} & -\frac{9}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{9}{5} & 3 & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{vmatrix} = \left(-\frac{48}{25} - \frac{54}{125} - \frac{54}{125} \right) - \left(\frac{27}{25} - \frac{16}{125} + \frac{324}{125} \right) = -\frac{791}{125}$$