

Applicazione della REGOLA di CARTESIO

Si consideri l'equazione parametrica

$$4mx^2 - 2(2m-1)x + m+1 = 0$$

- 1.1 Discutere la realtà ed il segno delle radici al variare del parametro.
- 1.2 Stabilire se esistono valori del parametro per i quali solo una radice è negativa, determinandoli in caso affermativo.

Soluzione

- 1.1 Per risolvere il quesito si deve far ricorso alla regola di Cartesio. Le radici sono reali se il discriminante dell'equazione è non negativo.

$$\frac{\Delta}{4} = (2m-1)^2 - 4m(m+1) \geq 0 \Leftrightarrow -8m+1 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{8}$$

Si devono studiare ora i segni dei coefficienti dell'equazione e discutere i diversi casi.

Riporto nella tabella seguente la discussione.

Discussione della realtà e del segno delle radici		
Valori del parametro m	Segni dei coefficienti	Caratteristica delle radici
Con $m < -1$ risulta $\Delta > 0$, i coefficienti dell'equazione sono diversi da zero e si hanno due variazioni.	$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ - & + & - \end{array}$	Le radici sono reali e distinte ed entrambe positive.
Con $m = -1$ si annulla il termine noto, l'equazione diventa spuria. $\Delta > 0$	$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ - & + & 0 \end{array}$	Una radice è nulla e poiché vi è una variazione la seconda radice è positiva.
Con $-1 < m < 0$ risulta $\Delta > 0$, i coefficienti dei tre termini sono diversi da zero. I loro segni sono indicati a lato.	$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ - & + & + \end{array}$	Si ha una variazione ed una permanenza, quindi una radice positiva ed una negativa. La radice positiva ha il valore assoluto maggiore.
Con $m = 0$ si annulla il coefficiente del termine di secondo grado, l'equazione diventa di primo grado.	$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ 0 & + & + \end{array}$	Una radice si perde (si dice che tende all'infinito) e l'altra radice è negativa.
Con $0 < m < \frac{1}{8}$ i coefficienti sono tutti positivi e risulta $\Delta > 0$.	$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ + & + & + \end{array}$	Le due radici sono negative perché si hanno due permanenze.
Con $m = \frac{1}{8}$ il discriminante dell'equazione si annulla: $\Delta = 0$, ed i coefficienti sono tutti positivi.	$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ + & + & + \end{array}$	Le due radici sono coincidenti e negative.
Con $m > \frac{1}{8}$ il discriminante è negativo: $\Delta < 0$.		Indipendentemente dal segno dei coefficienti le radici sono complesse coniugate.

- 1.2 I valori del parametro per i quali solo una radice è negativa sono quelli che verificano la doppia disuguaglianza: $-1 < m \leq 0$.