Soluzione del Test sui sistemi di disequazioni razionali

1) A(x) e B(x) sono due espressioni algebriche per le quali è noto che A(x)≥0 è verificata per i valori reali della variabile x non minori di -2 e B(x)<0 è verificata per i valori della variabile x minori di 2. Quale delle seguenti affermazioni è vera per il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) < 0 \end{cases}$$

1.1	L'insieme delle soluzioni del sistema è S=]-2;2]	V	
1.2	L'insieme delle soluzioni del sistema è S=]-2;2[	V	
1.3	L'insieme delle soluzioni del sistema è S=[-2;2[	**V** =	
1.4	L'insieme delle soluzioni del sistema è S=[-2;2]	V	

Giustificare la risposta

Elaborazioni

L'insieme delle soluzioni di un sistema di disequazioni è dato dall'intersezione degli insiemi delle soluzioni delle singole disequazioni componenti il sistema.

L'insieme delle soluzioni della prima disequazione è $S_1 = [-2;+\infty[$; l'insieme delle soluzioni della seconda disequazione è $S_2 =]-\infty;2[$. L'insieme delle soluzioni del sistema di disequazioni è

$S = S_1 \cap S_2 = [-2;2[$.

La risposta esatta è la 1.3

Valutazione: **2 punti** per la **risposta esatta**, **0 punti** per **risposta non data**, **-0,5** per **risposta errata**.
Fino a **3 punti** per un'adeguata giustificazione.

Max Punti

2) A(x) e B(x) sono due polinomi interi ed è noto che la disequazione A(x)<0 è soddisfatta nell'insieme $S_A =]-\infty;-2[$ e la disequazione B(x)>0 è soddisfatta nell'insieme $S_B =]1;+\infty[$.

In riferimento alla disequazione A(x)·B(x)>0 si può affermare che:

2.1	l'insieme delle soluzioni della disequazione è vuoto	V	**F** =
2.2	l'insieme delle soluzioni della disequazione è un sottoinsieme dell'intervallo]-2;1[	V	**F** =
2.3	l'insieme delle soluzioni della disequazione è]-2;1]	V	**F** =
2.4	l'insieme delle soluzioni della disequazione è un sottoinsieme di]-∞;-2]∪[1;+∞[.	**V** =	F

Giustificare le risposte con adeguate elaborazioni algebrico-grafiche

Giustificazioni

L'affermazione **2.1 è falsa**. Infatti, avendo precisato che A(x) e B(x) sono polinomi interi, essi sono definiti per ogni valore reale della variabile e, poiché vale la proprietà di tricotomia, per ciascun valore di x, per A(x) vale solo una della tre relazioni

A(x)<0, A(x)=0, A(x)>0;

analogamente, per B(x), vale solo una delle seguenti

B(x)<0, B(x)=0, B(x)>0

Tenendo presente che un polinomio nel campo nei numeri reali ammette solo un numero finito di soluzioni, analizzando il segno di ciascun fattore, si può affermare che:

- nell'intervallo]-∞;-2[, A(x) è negativo e B(x) può essere negativo o nullo ⇒ il prodotto A(x)·B(x) è positivo o nullo. Poiché può essere nullo al più per un numero finito di valori reali, segue che nell'intervallo]-∞;-2[in infiniti punti risulta A(x)·B(x)>0, quindi l'insieme delle soluzioni non è vuoto;

- nell'intervallo [-2;1[, A(x) può essere **positivo** o nullo e B(x) può essere **negativo** o nullo⇒ il prodotto **A(x)·B(x) è negativo o nullo,** quindi nell'intervallo]-2;1[risulta A(x)·B(x)≤0 e perciò **la 2.2 è falsa**;
- in virtù della discussione per il segno nell'intervallo [-2;1[si conclude che è falsa anche la 2.3;
- nell'intervallo [1;+∞[A(x) è positivo o nullo, B(x) è positivo o nullo (potrebbe annullarsi per x=1)⇒il prodotto A(x)·B(x) è positivo o nullo.

Tenendo presenti i diversi casi studiati emerge che **è vera solo la (2.4)**

Valutazione:
2 punti per ogni **risposta esatta**, **0 punti** per ogni **risposta non data**, **-0,5** per ogni **risposta errata**.
Fino a 3 punti per la **giustificazione corretta** relativa ad ogni affermazione.

Punti

3) Sono dati tre numeri reali a, b, c ed è noto che $a>b$ e $b>c$. Si può affermare che:

3.1 $a+b>2c$	**V** =	F
3.2 $a-c>0$	**V** =	F
3.3 $a+c>2b$	V	**F** =
3.4 $(a-b)\cdot(b-c)<(a-b)\cdot(a-c)$	**V** =	F

Elaborazioni

3.1 **E' vera**. Infatti risulta

$$a+b>b+b>c+c=2c$$

3.2 La disuguaglianza **è vera**.

Sfruttando la proprietà transitiva della relazione d'ordine si ha:
(a>b)∧(b>c)⇒a>c⇒ a-c>0.
Una dimostrazione diversa

$$\begin{pmatrix} a>b \Leftrightarrow a-b>0 \\ b>c \Leftrightarrow b-c>0 \end{pmatrix} \Rightarrow \big((a-b)+(b-c)>0\big) \Rightarrow (a-c>0)$$

3.3 La disuguaglianza **è falsa** perché non si verifica per ogni terna di numeri positivi.
Infatti, considerata ad esempio la terna di numeri a=8, b=6, c=5 è vero che
8>6, 6>5 è 8+5>6+6;
se si considerano i valori a=8, b=6, c=2 si ha
a>b, cioè 8>6;
b>c, cioè 6>2;
ma a+c = 8+2=10 <2b=12.

3.4 La disuguaglianza **è vera**. Infatti, una volta osservato che

$$a>b \Leftrightarrow a-b>0$$

nei due membri si può dividere per il fattore positivo (a-b) lasciando invariato il verso della disuguaglianza. La disuguaglianza ottenuta è

$$b-c<a-c$$

che è equivalente alla disuguaglianza $a>b$, vera per ipotesi.

Valutazione:
2 punti per ogni **risposta esatta**, **0 punti** per ogni **risposta non data**, **-0,5** per ogni **risposta errata**.
Fino a 3 punti per la **giustificazione corretta** relativa ad ogni affermazione.

Punti

4) Determinare le soluzioni del sistema di disequazioni che segue giustificando la risposta.

$$\begin{cases} 2|x|-1<0 \\ 4x-3>0 \end{cases}$$

Risposta
S=∅

Elaborazioni

La prima disequazione è soddisfatta nell'intervallo $\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$; la seconda disequazione è soddisfatta nell'intervallo $\left]\frac{3}{4};+\infty\right[$. Poiché l'insieme delle soluzioni del sistema è l'intersezione dei due suddetti intervalli, si conclude che il sistema è impossibile, cioè l'insieme è vuoto, perché i due intervalli sono disgiunti.

Valutazione:
Fino a **6 punti** per la **risposta esatta con adeguata giustificazione**, **0 punti** per la **risposta non data o del tutto errata.**

Punti

5) Determinare le soluzioni del sistema di disequazioni giustificando la risposta.

$$\begin{cases} \sqrt{2}x \le 1 \\ \frac{1}{x^2}>1 \end{cases}$$

Risposta
$S=\left]-1;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]-\{0\}$

Elaborazioni

La prima disequazione è soddisfatta nell'insieme $S_1=\left]-\infty;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

La seconda è soddisfatta nell'insieme $S_2=]-1;1[-\{0\}$. L'insieme intersezione $S_1\cap S_2=\left]-\infty;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]-\{0\}$ rappresenta l'insieme delle soluzioni del sistema.

Valutazione:
Fino a **8 punti** per la **risposta esatta con adeguata giustificazione**, **0 punti** per la **risposta non data o del tutto errata.**

Punti

6) Determinare le soluzioni del sistema di disequazioni giustificando la risposta.

$$\begin{cases} 4x-x^2 \ge 0 \\ x^2-8x+16 \le 0 \end{cases}$$

Risposta
$S=\{4\}$

Elaborazioni

La disequazione $4x-x^2\ge 0$ è soddisfatta nell'intervallo $S_1=[0;4]$; per la seconda disequazione osserviamo che si può scrivere nella forma equivalente $(x-4)^2\le 0$, dalla quale si evince che è soddisfatta solo per $x = 4$, cioè il suo insieme di soluzioni è $S_2=\{4\}$. L'insieme delle soluzioni del sistema è $S_1\cap S_2=\{4\}$.

Valutazione:
Fino a **10 punti** per la **risposta esatta con adeguata giustificazione**, **0 punti** per la **risposta non data o del tutto errata.**

Punti

7) Determinare le soluzioni del sistema di disequazioni giustificando la risposta.

$$\begin{cases} x^4 - 8x \geq 0 \\ \dfrac{x}{|x+1|} < 0 \end{cases}$$

Risposta
$S =]-\infty;0[- \{-1\}$

Elaborazioni

Prima disequazione

Il primo membro della disequazione può essere scomposto in fattori, raccogliendo innanzitutto il fattore comune x e scomponendo successivamente la differenza di due cubi. Si ha:

$$x\left(x^3-8\right) \geq 0 \Leftrightarrow\ x(x-2)\left(x^2+2x+4\right) \geq 0$$

Per quanto riguarda il trinomio di secondo grado residuo facciamo notare che il suo discriminante è negativo $\Delta = 4-16 = -12$ e quindi il trinomio assume segno positivo $\forall x \in \mathrm{R}$. La disequazione è equivalente alla seguente $x(x-2) \geq 0$, il cui insieme di soluzioni è $S_1 =]-\infty;0] \cup [2;+\infty[$.

Seconda disequazione

La disequazione è fratta ed ha senso per ogni valore reale diverso da -1. Nel dominio della disequazione il denominatore è strettamente positivo, per cui la frazione assume segno negativo se e solo se è negativo il numeratore. Deduciamo che l'insieme delle soluzione della disequazione è $S_2 =]-\infty;0[- \{-1\}$.

L'insieme delle soluzioni del sistema è $S_1 \cap S_2 = S_2$

Valutazione:
Fino a **10 punti** per la risoluzione corretta della prima disequazione del sistema; 0 punti per la mancata risoluzione o per elaborazione del tutto errata.
Fino a **6 punti** per la risoluzione corretta della seconda disequazione del sistema; 0 punti per la mancata risoluzione o per elaborazione del tutto errata.
Fino a **4 punti** per l'indicazione esatta delle soluzioni del sistema e le elaborazioni algebrico-grafiche riportate; 0 punti per la mancata indicazione della soluzione o per elaborazione del tutto errata.

Punti