

Calcolo letterale

Scomposizione in fattori-03

Sulla differenza di due quadrati ed il quadrato di un binomio

- 1) $a^4 + 9 - 6a^2 - 25b^2 = (a^2 - 3)^2 - (5b)^2 = (a^2 - 3 + 5b)(a^2 - 3 - 5b)$
- 2) $36y^2 - 14x - 49 - x^2 = 36y^2 - (14x + 49 + x^2) = (6y)^2 - (x + 7)^2 = (6y + x + 7)(6y - x - 7)$
- 3) $81x^4 - a^2 - 2ab - b^2 = (9x^2)^2 - (a + b)^2 = (9x^2 + a + b)(9x^2 - a - b)$
- 4) $5t^2 - 5s^2 - 10s - 5 = 5[t^2 - (s^2 + 2s + 1)] = 5[t^2 - (s + 1)^2] = 5(t + s + 1)(t - s - 1)$
- 5) $x^2y^2 - a^2(y^2 - 2y + 1) = (xy)^2 - a^2(y - 1)^2 = (xy + ay - a)(xy - ay + a)$
- 6) $0,01 - 4a^4 - 8a^2 - 4 = (10^{-1})^2 - 4(a^2 + 1)^2 = (10^{-1} + 2a^2 + 2)(10^{-1} - 2a^2 - 2)$
- 7) $4a^2 + 9b^2 - 12ab - 4x^2 - y^2 + 4xy = (2a - 3b)^2 - (2x - y)^2 = (2a - 3b + 2x - y)(2a - 3b - 2x + y)$
- 8) $t^{2n} - 4y^{2n} - 6t^n + 9 = (t^n - 3)^2 - (2y^n)^2 = (t^n - 3 + 2y^n)(t^n - 3 - 2y^n)$
- 9) $16x^4 - 8a^4x^2 + a^8 = (4x^2 - a^4)^2 = (2x + a^2)^2(2x - a^2)^2$
- 10) $a^{4n} - 2a^{2n+2}b^2 + a^4b^4 = (a^{2n} - a^2b^2)^2 = (a^n + ab)^2(a^n - ab)^2$

Note teoriche

Trinomio particolare

Primo caso

Ricordiamo che per il trinomio $x^2 + sx + p$, se si trovano due numeri m, n che verificano le due proprietà

- $m + n = s$
- $m \cdot n = p$

allora si dimostra agevolmente che sussiste la seguente scomposizione in fattori

$$x^2 + sx + p = (x + m)(x + n)$$

Dim.

Sostituendo nel trinomio s e p con $m+n$ ed mn rispettivamente si ha

$$\begin{aligned} x^2 + sx + p &= x^2 + (m+n)x + mn = x^2 + mx + nx + mn = x(x+m) + n(x+m) = \\ &= (x+m)(x+n) \quad \text{C.V.D.} \end{aligned}$$

Secondo caso

Quando si ha il trinomio $ax^2 + bx + c$, con a, b, c numeri interi, si può cercare di scomporlo in fattori in modo elementare cercando due numeri interi m, n aventi le seguenti proprietà:

- $m + n = b$
- $m \cdot n = ac$

Se si trova la coppia di numeri m, n si potrà scrivere il trinomio sostituendo b con $m+n$ e si potrà procedere con raccoglimenti parziali. Se non esiste alcuna coppia di numeri interi come quella indicata il trinomio non si scompone elementarmente, occorre fare ricorso alla teoria delle equazioni di secondo grado ¹.

Applicazioni

- 1) $a^2 + 3a + 2 = (a+1)(a+2)$
- 2) $a^2 - a - 20 = (a-5)(a+4)$
- 3) $a^2 + 2a - 8 = (a+4)(a-2)$
- 4) $a^2 - 18a + 80 = (a-10)(a-8)$
- 5) $a^2 + 4a - 32 = (a-4)(a+8)$
- 6) $x^2 - 5x - 14 = (x-7)(x+2)$
- 7) $x^2 + 6x + 8 = (x+2)(x+4)$
- 8) $x^2 - 4ax - 5a^2 = \dots = (x-5a)(x+a)$
- 9) $x^2 + 3tx - 10t^2 = \dots = (x+5t)(x-2t)$
- 10) $3x^2 + 4x - 7 =$ Occorre trovare i due numeri interi m, n tali che: $m+n = +4$ e $m \cdot n = -21$; i due numeri esistono e sono $m = 7, n = -3$. Procediamo con la scomposizione.
 $3x^2 + 4x - 7 = 3x^2 + 7x - 3x - 7 = x(3x+7) - (3x+7) = (3x+7)(x-1)$
- 11) $3x^2 - 5x - 2 =$ Deve essere $m+n = -5$ e $m \cdot n = -6 \rightarrow m = -6, n = 1$
 $3x^2 - 5x - 2 = 3x^2 - 6x + x - 2 = 3x(x-2) + (x-2) = (x-2)(3x+1)$
- 12) $4x^2 - 3x - 10 =$ Deve essere $m+n = -3$ e $m \cdot n = -40 \rightarrow m = -8, n = 5$
 $4x^2 - 3x - 10 = 4x^2 - 8x + 5x - 10 = 4x(x-2) + 5(x-2) = (x-2)(4x+5)$
- 13) $6x^2 + 5x - 6 = \dots = 6x^2 + 9x - 4x - 6 = 3x(x+3) - 2(x+3) = (x+3)(3x-2)$
- 14) $8x^2 + 6x - 9 = \dots = 8x^2 + 12x - 6x - 9 = 4x(2x+3) - 3(2x+3) = (2x+3)(4x-3)$
- 15) $15x^2 - 13x + 2 = \dots = 15x^2 - 10x - 3x + 2 = 5x(3x-2) - (3x-2) = (3x-2)(5x-1)$
- 16) $2x^2 + x - 3 = \dots = (x-1)(2x+3)$
- 17) $t^4 - 10t^2 + 9 = (t^2-1)(t^2-9) = (t+1)(t-1)(t+3)(t-3)$

¹Il tema delle equazioni di secondo grado è previsto nella trattazione del programma della seconda classe del Liceo Scientifico.

$$18) 4x^2 + 4ax - 3a^2 = \dots = 4x^2 - 2ax + 6ax - 3a^2 = 2x(2x - a) + 3a(2x - a) = (2x - a)(2x + 3a)$$

$$19) 3a^{2n} - 4a^n - 7 = 3a^{2n} + 3a^n - 7a^n - 7 = 3a^n(a^n + 1) - 7(a^n + 1) = (a^n + 1)(3a^n - 7)$$

$$20) 2a^{3n} + a^{2n} - 3a^n = a^n(2a^{2n} + a^n - 3) = \dots = a^n(a^n - 1)(2a^n + 3)$$

Note teoriche

Somma e differenza di due cubi, differenza di due quadrati, quadrato di binomio

Ricordiamo che sussistono i seguenti casi notevoli

Somma di due cubi: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Differenza di due cubi: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$$1) a^3 - 27 = a^3 - 3^3 = (a - 3)(a^2 + 3a + 9)$$

$$2) a^3b^6 - 1 = (ab^2)^3 - 1^3 = (ab^2 - 1)(a^2b^4 + ab^2 + 1)$$

$$3) 8a^3 + 1 = (2a + 1)(4a^2 - 2a + 1)$$

$$4) \frac{a^3}{8} + 8b^3 = \left(\frac{a}{2}\right)^3 + (2b)^3 = \left(\frac{a}{2} + 2b\right)\left(\frac{a^2}{4} - ab + 4b^2\right)$$

$$5) 1.000x^3 + 10^{-3}y^3 = (10x)^3 + (10^{-1}y)^3 = (10x + 10^{-1}y)(100x^2 - xy + 10^{-2}y^2)$$

$$6) x^6y^3 - x^3y^{12} = x^3y^3(x^3 - y^9) = x^3y^3(x - y^3)(x^2 + xy + y^2)$$

$$7) \frac{8}{27}x^4y^2 + 125xy^5 = xy^2\left[\left(\frac{2}{3}x\right)^3 + (5y)^3\right] = xy^2\left(\frac{2}{3}x + 5y\right)\left(\frac{4}{9}x^2 - \frac{10}{3}xy + 25y^2\right)$$

$$8) x^4y^5z^6 + 1.000x^4y^{-1}z^9 = x^4y^{-1}z^6(y^6 + 10^3z^3) = x^4y^{-1}z^6(y^2 + 10z)(y^4 - 10y^2z + 100z^2)$$

$$9) x^{3m+1}y^{9m+2} - 27xy^2 = xy^2(x^{3m}y^{9m} - 27) = xy^2[(x^m y^{3m})^3 - 3^3] = xy^2(x^m y^{3m} - 3)(x^{2m}y^{6m} + 3x^m y^{3m} + 9)$$

$$10) 16x^{3n+4} - 54x^4y^{6n} = 2x^4(8x^{3n} - 27y^{6n}) = 2x^4[(2x^n)^3 - (3y^{2n})^3] = 2x^4(2x^n - 3y^{2n})(4x^{2n} + 6x^n y^{2n} + 9y^{4n})$$

$$11) 2x^4y^3 + 16xy^{3n} = 2x(x^3 + 2^3y^{3n}) = 2x(x + 2y^n)(x^2 - 2xy^n + 4y^{2n})$$

$$12) (x - y)^3 - (x + y)^3 = \dots = -2y(3x^2 + y^2)$$

$$13) x^{3n-3}y^{6n+1} - 8x^{-3}y^{3n-2} = x^{-3}y^{3n-2}(x^{3n}y^{3n+3} - 8) = x^{-3}y^{3n-2}(x^n y^{n+1} - 2)(x^{2n}y^{2n+2} + 2x^n y^{n+1} + 4)$$

$$14) t^6 - 2t^3 + 1 = (t^3 - 1)^2 = (t - 1)^2(t^2 + t + 1)^2$$

$$15) a^9 + 2a^6b^3 + a^3b^6 = a^3(a^6 + 2a^3b^3 + b^6) = a^3(a + b)^2(a^2 - ab + b^2)^2$$

$$16) t^6 - 7t^3 - 8 = (t^3 + 1)(t^3 - 8) = (t + 1)(t^2 - t + 1)(t - 2)(t^2 + 2t + 4)$$