

Calcolo letterale

Prodotti tra polinomi sfruttando casi notevoli

- 1) $(x-2y)(x+2y)(x^2-4y^2) = (x^2-4y^2)^2 = x^4 - 8x^2y^2 + 16y^4$
- 2) $(4x^3y - 16x^2y^3)(3x^2y^2 + 12xy^4) = 4x^2y(x-4y^2)3xy^2(x+4y^2) = 12x^3y^3(x^2-16y^4) = 12x^5y^3 - 192x^3y^7$
- 3) $16\left(x - \frac{1}{2}\right)^2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)\right)^2 = ((2x-1)(2x+1))^2 = (4x^2-1)^2 = 16x^4 - 8x^2 + 1$
- 4) $243\left(x - \frac{1}{3}\right)^3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = 243\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)^2\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right) \cdot 81\left(x^2 - \frac{1}{9}\right)^2 = (3x-1) \cdot (9x^2-1)^2 = (3x-1) \cdot (81x^4 - 18x^2 + 1) = 243x^5 - 81x^4 - 54x^3 + 18x^2 + 3x - 1$
- 5) $(a^2 + ab)(a^2 - ab)(a^2 + b^2) = a(a+b) \cdot a(a-b)(a^2 + b^2) = a^2(a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = a^2(a^4 - b^4) = a^6 - a^2b^4$
- 6) $(a-b)^3 + 3(a-b)^2(a+b) + 3(a-b)(a+b)^2 + (a+b)^3 =$ si riconosce che l'espressione è lo sviluppo del seguente cubo $((a-b) + (a+b))^3$ e perciò il suo valore è $(2a)^3 = 8a^3$
- 7) $2^{n+1} - 2^n = 2^n(2-1) = 2^n$
- 8) $3^{n+1} - 3^n = 3^n(3-1) = 2 \cdot 3^n$
- 9) $\frac{(3^{10} + 3^{11})^2}{(3^6 - 3^5)^3} = \frac{(3^{10}(1+3))^2}{(3^5(3-1))^3} = \frac{3^{20} \cdot 2^4}{3^{15} \cdot 2^3} = 2 \cdot 3^5$
- 10) $\frac{0,08 \cdot 5^2}{0,4 \cdot 10^{-3}} = \frac{8 \cdot 10^{-2} \cdot 5^2}{4 \cdot 10^{-4}} = 2 \cdot 5^2 \cdot 10^2 = 2 \cdot 50^2 = 5.000$

Divisioni tra polinomi

Determinare resto e quoziente delle seguenti divisioni.

1) $(x^3 - x - 2) : (x+1)$

Resto $R = P(-1) = (-1)^3 - (-1) - 2 = -2$

Quoziente $Q = x^2 - x$

2) $(2x^3 + x^2 - 6) : (2x-1)$

Resto: $R = P\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{11}{2},$

Quoziente $Q = x^2 + x + \frac{1}{2}$

- 3) $(2x^3 - x^2 + 5x - 6):(x-1)$ $R = P(1) = 0, Q = 2x^2 + x + 6$
 4) $(x^4 - 2x^2 + 3x - 5):(x+3)$ $R = 49, Q = x^3 - 2x^2 + 7x - 18$
 5) $(4a^3 - 5a^2x + 6ax^2 - 7x^3):(x+a)$

Eseguendo la divisione rispetto alla lettera a , $(4a^3 - 5a^2x + 6ax^2 - 7x^3):(a+x)$, si ottengono come resto $R(a) = -22x^3$ e come quoziente $Q(a) = 4a^2 - 9ax + 15x^2$.

Eseguendo la divisione rispetto alla lettera x si ottengono come resto $R(x) = 22a^3$ e come quoziente $Q(x) = -7x^2 + 13ax - 18a^2$.

Osservazione

Quando si affronta una divisione tra polinomi contenenti due o più lettere è necessario stabilire rispetto a quale lettera si intende eseguire la divisione⁽¹⁾. Se eseguendo la divisione rispetto ad una particolare lettera questa non è esatta, cioè presenta un resto diverso da zero, allora sarà non esatta la divisione se eseguita rispetto a ciascuna altra lettera presente nei due polinomi ed una volta eseguita si otterranno resto e quoziente diversi caso per caso. Se invece la divisione rispetto ad una lettera risulterà esatta, allora risulterà esatta se eseguita rispetto a ciascuna delle lettere presenti e in ogni caso si otterrà come polinomio quoziente lo stesso quoziente (ed ovviamente come resto sempre zero).

- 6) $(x^3 - a^2x + ax^2 - a^3):(x-a)$ $R = 0, Q = x^2 + 2ax + a^2$
 7) $(2x^2 - 5x - 6):(2x+5)$ $R = P\left(-\frac{5}{2}\right) = 19, Q = x - 5$
 8) Nella divisione $(mx^2 - 4x + 3):(x-2)$, stabilire se esiste un particolare valore da assegnare al parametro m in modo che la divisione risulti esatta.

La divisione è esatta se il resto è zero. Applicando il **teorema del resto** si ottiene come resto $R = P(2) = 4m - 5$ e questo valore è nullo solo con $m = \frac{5}{4}$. Assegnando dunque al parametro m il valore $\frac{5}{4}$ la divisione risulterà esatta ed il corrispondente polinomio quoziente sarà $Q = \frac{5}{4}x - \frac{3}{2}$.

- 9) Determinare il valore del parametro m per cui la divisione $(x^3 + mx^2 - mx + 4):\left(x + \frac{1}{2}\right)$ è esatta e trovare il corrispondente polinomio quoziente.

Risposta- La divisione è esatta con $m = -\frac{31}{6}$; il quoziente è $Q = x^2 - \frac{17}{3}x + 8$

⁽¹⁾ evidentemente dopo aver verificato che sussistano le condizioni affinché si possa eseguire la divisione indicata

10) Stabilire se la divisione $(x^3 + mx^2 - mx + 4):(x - 1)$ può essere esatta per qualche valore del parametro m .

Risposta- La divisione non può essere esatta per alcun valore del parametro m perché il resto della divisione è indipendente dal valore del parametro e vale $R = 5 \neq 0$.

Esercizi proposti

1) $(4a^2x - 6ax^2 - 3x^3):(x + a)$

$$R(x) = -7a^3, \quad Q(x) = -3x^2 - 3ax + 7a^2$$

2) $(5ax^2 - 3a^2x - 2a^3):(a - x),$

$$R = 0, \quad Q = -2a^2 - 5ax$$

3) $(x^4 - a^2x^2 + ax^3):(ax + x^2)$

4) $(x^3 - a^3):(x^2 + ax + a^2)$

5) $(x^4 - a^3x):(x^2 - ax + a^2)$