

Problemi sulle frazioni (per il primo liceo)

P1) Una frazione ha il numeratore maggiore di cinque unità rispetto al denominatore ed il valore della frazione è $\frac{5}{4}$. Trovare la frazione.

Soluzione

Sia x il valore del denominatore della frazione. Deve aversi:

$$\frac{x+5}{x} = \frac{5}{4} \rightarrow 4x + 20 = 5x \rightarrow x = 20$$

La frazione richiesta è $\frac{25}{20}$.

P2) Considerata una frazione con numeratore e denominatore positivi, si stabilisca di quanto si deve aumentare il numeratore affinché mantenendo costante il denominatore il valore della frazione aumenti del 50% rispetto al valore della frazione originaria.

Soluzione

Sia $\frac{x}{y}$ la frazione in esame e indichiamo con k il valore di cui far aumentare il numeratore. Deve

sussistere la seguente uguaglianza:

$$\frac{x+k}{y} = \frac{x}{y} + \frac{50}{100} \cdot \frac{x}{y} \rightarrow \frac{x+k}{y} = \frac{3}{2} \cdot \frac{x}{y} \rightarrow 2x + 2k = 3x \rightarrow k = \frac{x}{2}, \text{ con } y \neq 0.$$

Dunque, con $x \neq 0$ e $y \neq 0$, si deve aumentare il numeratore della sua metà per ottenere una frazione che sia del 50% superiore alla frazione di partenza.

Es. Con $\frac{8}{3} \rightarrow \frac{8+4}{3} = \frac{12}{3} = 4 = \frac{8}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3}$

Con $\frac{4}{9} \rightarrow \frac{4+2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{4}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{3}$

P3) Per la frazione $\frac{x}{y}$ è noto che aumentando di una unità il numeratore e lasciando invariato il denominatore il valore della frazione aumenta del 10%, se invece si lascia invariato il numeratore e si diminuisce di una unità il denominatore il valore della frazione aumenta del 20%. Trovare la frazione.

Soluzione

Osserviamo che x, y devono essere soluzioni del seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} \frac{x+1}{y} = 1,1 \cdot \frac{x}{y} \\ \frac{x}{y-1} = 1,2 \cdot \frac{x}{y} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+1 = x + \frac{1}{10}x \\ \frac{1}{y-1} = \frac{12}{10y} \end{cases} \rightarrow x = 10, y = 6. \text{ La frazione richiesta è } \frac{10}{6}$$

Osservazione

La frazione trovata è equivalente ad infinite altre frazioni che si ottengono dalla suddetta applicando la proprietà invariantiva, moltiplicando, cioè, numeratore e denominatore per uno stesso numero

diverso da zero. Il lettore verifichi con degli esempi che tra le infinite frazioni equivalenti a $\frac{10}{6}$ solo

quest'ultima verifica la proprietà richiesta. Ad esempio, considerando la frazione equivalente $\frac{5}{3}$, aumentando il numeratore di una unità il valore della frazione aumenta del 20%, mentre diminuendo il denominatore di una unità il valore della frazione aumenta del 50% come dimostrano le elaborazioni che seguono:

$$\frac{5}{3} \rightarrow \frac{5+1}{3} = 2 = \frac{5}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{3} + 20\% \cdot \frac{5}{3};$$
$$\frac{5}{3} \rightarrow \frac{5}{3-1} = \frac{5}{2} = \frac{5}{3} + \frac{5}{6} = \frac{5}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{3} + 50\% \cdot \frac{5}{3}$$