

Risoluzione di sistemi di equazioni di primo grado letterali

Discutere i seguenti sistemi di equazioni.

- a) $\begin{cases} 4x - 3y = 4m - 7 \\ x + y = m \end{cases}$ R: $\begin{cases} x = m - 1 \\ y = 1 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} 2x + 4y + 3m = 0 \\ 4x - my = 2m + m^2 \end{cases}$ R: con $m \neq -8$, $\begin{cases} x = \frac{m}{2} \\ y = -m \end{cases}$; con $m = -8$, $\begin{cases} x = 12 - 2\alpha \\ y = \alpha \end{cases}, \forall \alpha \in R$
- c) $\begin{cases} \frac{x}{m} + \frac{y}{m+1} = 2 \\ mx - y = m^2 - m - 1 \end{cases}$ R: Con $(m \neq 0) \wedge (m \neq -1)$, $\begin{cases} x = m \\ y = m + 1 \end{cases}$
- d) $\begin{cases} \frac{x+2m}{3m} + y = 1 \\ x + 3y = 2 - m \end{cases}$ R: Con $(m \neq 0) \wedge (m \neq 1)$, $\begin{cases} x = -m \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$
- e) $\begin{cases} \frac{x-m}{y+2-m} = 1 \\ 2x + y = 6m - 2 \end{cases}$ R: Con $m \neq 0$, $\begin{cases} x = 2m \\ y = 2m - 2 \end{cases}$; con $m = 0$, il sistema è impossibile.
- f) $\begin{cases} \frac{x+m-1}{m-1} - \frac{2y-m}{m} = 0 \\ \frac{x+2m}{2y+1} = 1 \end{cases}$

R: Con $(m=0) \vee (m=1)$ il sistema perde di significato. Con $m=-1$ nessuna soluzione. Con $(m \neq 0) \wedge (m \neq 1) \wedge (m \neq -1)$ si ha $x=1-m$, $y=m/2$.

Premessa

Nella risoluzione dei sistemi di equazioni letterali di primo grado in generale il metodo più comodo è quello che utilizza la regola di Cramer. Nella risoluzione dei sistemi che seguono, tranne in un caso, utilizziamo detto metodo.

$$c) \begin{cases} \frac{x}{m} + \frac{y}{m+1} = 2 \\ mx - y = m^2 - m - 1 \end{cases}$$

La prima equazione del sistema presenta dei denominatori che dipendono dal parametro m ; per l'esistenza di detta equazione, e del sistema stesso, è necessario imporre le condizioni di esistenza (in breve C.E.) che assicurino che ogni denominatore sia diverso da zero.

Dunque C.E.: $(m \neq 0) \wedge (m \neq -1)$.

Nel rispetto delle C.E. si elabora la prima equazione del sistema eliminando i denominatori e trasformandola in una equivalente.

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{m+1} = 2 \rightarrow (m+1)x + my = 2m(m+1) \text{ ed il sistema si riconduce alla forma normale}$$

$$\begin{cases} (m+1)x + my = 2m(m+1) \\ mx - y = m^2 - m - 1 \end{cases}$$

Calcolo dei tre determinanti

$$D = \begin{vmatrix} m+1 & m \\ m & -1 \end{vmatrix} = -(m^2 + m + 1), \quad D_x = \begin{vmatrix} 2m(m+1) & m \\ m^2 - m - 1 & -1 \end{vmatrix} = -m(m^2 + m + 1),$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m+1 & 2m(m+1) \\ m & m^2 - m - 1 \end{vmatrix} = (m+1)(m^2 - m - 1) - 2m^2(m+1) = -(m+1)(m^2 + m + 1)$$

Discussione

Osserviamo che il trinomio $m^2 + m + 1$ non è scomponibile in fattori di primo grado in $\mathbb{R}^{(1)}$, per cui risulta diverso da zero per ogni valore del parametro m ; ciò assicura che $D \neq 0$ per ogni m reale e quindi il sistema, con m che rispetta le C.E., è determinato ed ammette una sola soluzione. Pertanto, con $(m \neq 0) \wedge (m \neq -1)$ l'unica soluzione del sistema è:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-m(m^2 + m + 1)}{-(m^2 + m + 1)} = m, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-(m+1)(m^2 + m + 1)}{-(m^2 + m + 1)} = m+1$$

⁽¹⁾ Si dice che il trinomio è irriducibile in $\mathbb{R}$

$$d) \begin{cases} \frac{x+2m}{3m} + y = 1 \\ x+3y = 2-m \end{cases}$$

Per l'esistenza della prima equazione del sistema deve risultare $m \neq 0$. Dunque: C.E. $m \neq 0$

Nel rispetto delle C.E. il sistema si riconduce alla seguente forma equivalente:

$$\begin{cases} x+3my = m \\ x+3y = 2-m \end{cases}$$

Calcolo dei tre determinanti

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3m \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3(1-m), \quad D_x = \begin{vmatrix} m & 3m \\ 2-m & 3 \end{vmatrix} = 3m(m-1), \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & m \\ 1 & 2-m \end{vmatrix} = 2(1-m)$$

Discussione

Osserviamo che il determinante del sistema D si annulla con $m=1$ e questo valore del parametro è ammissibile in virtù delle C.E. Sussistono allora i seguenti casi.

d.1) Con $m=1$ i tre determinanti del sistema sono nulli: $D=D_x=D_y=0$ ed il sistema è indeterminato. Le due equazioni del sistema si riconducono all'equazione $x+3y=1$, ed ogni soluzione di quest'equazione è anche soluzione del sistema. Concludiamo che le infinite soluzioni del sistema sono le coppie ordinate $(x=1-3\alpha; y=\alpha)$, per ogni α reale.

d.2) Con $(m \neq 0) \wedge (m \neq 1)$ il sistema è determinato ed ammette come soluzione la coppia

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{3m(m-1)}{3(1-m)} = -m, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{2(1-m)}{3(1-m)} = \frac{2}{3}$$

$$e) \begin{cases} \frac{x-m}{y+2-m} = 1 \\ 2x+y = 6m-2 \end{cases}$$

Per l'esistenza della prima equazione del sistema deve essere soddisfatta la condizione $y+2-m \neq 0$, cioè $y \neq m-2$; dunque C.E. $y \neq m-2$. Non si deve imporre alcuna limitazione sui valori del parametro m .

Con la limitazione suddetta il sistema si riconduce alla forma normale equivalente seguente

$$\begin{cases} x-y = 2 \\ 2x+y = 6m-2 \end{cases}$$

Data la semplicità della forma ottenuta in questo caso non utilizziamo per la risoluzione il **metodo** di Cramer, ma quello **di riduzione**.

Risoluzione del sistema con il metodo di riduzione

Sommando membro a membro le due equazioni si ottiene l'equazione $3x=6m$, dalla quale si ricava $x=2m$. Sostituendo questo valore in una delle due equazioni, in particolare scegliamo la prima perché più semplice, si ricava anche il valore dell'incognita y .

$$\begin{cases} x = 2m \\ x - y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2m \\ y = 2m - 2 \end{cases}.$$

Accettabilità della coppia di valori come soluzione

A questo punto occorre stabilire se la coppia di valori trovata ($x=2m; y=2m-2$) soddisfa le C.E. in modo che possa essere accettata come soluzione del sistema. Ricordiamo che deve risultare $y \neq m-2$, perciò dobbiamo richiedere che risulti

$2m-2 \neq m-2$, dalla quale emerge che deve essere $m \neq 0$.

Conclusioni

e.1) Con $m \neq 0$ il sistema in esame è determinato ed ammette come soluzione la coppia ($x=2m; y=2m-2$).

e.2) Con $m=0$ la coppia ($x=0; y=-2$) non può essere accettata come soluzione del sistema perché contrasta con le C.E. e non essendoci altre coppie di numeri utili il sistema non ammette soluzioni, dunque è impossibile.

f)
$$\begin{cases} \frac{x+m-1}{m-1} - \frac{2y-m}{m} = 0 \\ \frac{x+2m}{2y+1} = 1 \end{cases}$$

Elaborazioni

Il sistema è composto da due equazioni letterali che richiedono che siano verificate delle particolari condizioni algebriche per la loro esistenza e per l'esistenza del sistema stesso. Le condizioni sono:

$(m-1 \neq 0) \wedge (m \neq 0)$ per la prima equazione;

$2y+1 \neq 0$ per la seconda equazione.

In sintesi, per l'esistenza del sistema di equazioni devono essere soddisfatte le seguenti

C.E. $(m \neq 1) \wedge (m \neq 0), y \neq -1/2$.

Con le C.E. precisate si elaborano le due equazioni del sistema riducendo questo alla forma semplificata seguente

$$\begin{cases} mx - 2(m-1)y = -2m(m-1) \\ x - 2y = 1 - 2m \end{cases}$$

Risolvi il sistema applicando il metodo di Cramer.

Calcolo dei tre determinanti

$$D = \begin{vmatrix} m & -2(m-1) \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2, \quad D_x = \begin{vmatrix} -2m(m-1) & -2(m-1) \\ 1-2m & -2 \end{vmatrix} = 2(m-1),$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & -2(m-1) \\ 1 & 1-2m \end{vmatrix} = -m$$

Discussione

Osserviamo che il determinante D del sistema è indipendente dal parametro m ed è diverso da zero; ciò implica che nel rispetto delle condizioni di esistenza il sistema è determinato. I valori che devono assumere x ed y sono

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{2(m-1)}{-2} = 1-m, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-m}{-2} = \frac{m}{2}$$

Teniamo ora presente che oltre alle limitazioni per il parametro $(m \neq 1) \wedge (m \neq 0)$ deve risultare anche $y \neq -1/2$, dunque deve sussistere la relazione

$$y = \frac{m}{2} \neq -\frac{1}{2}, \text{ e quindi deve essere } m \neq -1.$$

Sussistono pertanto le seguenti

Conclusioni

f.1) Se $(m \neq 1) \wedge (m \neq 0) \wedge (m \neq -1)$ il sistema è determinato ed ammette come soluzione la coppia

$$\left(x = 1-m; y = \frac{m}{2} \right)$$

f.2) Se $m = -1$ le espressioni di x ed y conducono alla coppia $\left(x = 2; y = -\frac{1}{2} \right)$ che non è accettabile come soluzione del sistema ed il sistema è impossibile.

f.3) Se $(m = 1) \vee (m = 0)$ il sistema perde di significato.