

Risoluzione di equazioni letterali fratte

$$\text{Es1)} \frac{3}{2+kx} + \frac{5}{4-kx} = 0$$

$$\text{Es2)} \frac{k+x}{x+1} - \frac{kx-2}{3x+3} = k$$

$$\text{Es3)} \frac{k-2x}{x^2+3x} - \frac{2x-3k}{x^2-3x} + \frac{4}{x} = 0$$

Soluzione

$$\text{Es1)} \frac{3}{2+kx} + \frac{5}{4-kx} = 0$$

L'equazione parametrica ha senso sotto le condizioni $2+kx \neq 0$, $4-kx \neq 0$, quindi per $x \neq -\frac{2}{k}$ e $x \neq \frac{4}{k}$.

Dette condizioni rappresentano le condizioni di esistenza (C.E.)

Sommando le due frazioni e riducendo i termini simili si ottiene successivamente

$$\frac{3(4-kx) + 5(2+kx)}{(2+kx)(4-kx)} = 0, \frac{2kx+22}{(2+kx)(4-kx)} = 0$$

Con le condizioni imposte per x si può eliminare il denominatore e si perviene all'equazione

$2kx+22=0$, che va discussa.

Discussione

Sussistono i seguenti casi.

- a) Se $k=0$ l'equazione diventa $0x=-11$, che è impossibile.
- b) Se $k \neq 0$ l'equazione ammette come radice $x = -\frac{11}{k}$. Questo valore è accettabile perché rispetta le C.E. e si conclude che l'equazione di partenza è determinata ed ammette come unica soluzione detto valore.

$$\text{Es2)} \frac{k+x}{x+1} - \frac{kx-2}{3x+3} = k$$

L'equazione si riconduce alla forma seguente

$$\frac{3(k+x) - (kx-2) - 3k(x+1)}{3(x+1)} = 0, \text{ che semplificata diventa}$$

$$\frac{(3-4k)x+2}{3(x+1)}=0$$

L'equazione ha senso sotto la condizione $x+1 \neq 0$.

Annullando il numeratore della frazione si ha l'equazione

$$(4k-3)x=2$$

Che va discussa.

Discussione

Sussistono i seguenti casi.

- a) Con $k = \frac{3}{4}$ l'equazione diventa $0x=2$ che evidentemente è impossibile.
- b) Con $k \neq \frac{3}{4}$ l'equazione ammette come radice $x = \frac{2}{4k-3}$ che per essere accettabile come soluzione dell'equazione di partenza deve risultare $\frac{2}{4k-3} \neq -1$.

Poiché $\frac{2}{4k-3}=1$ è verificata per $k = \frac{5}{4}$ concludiamo che

b.1) se $k = \frac{5}{4}$ il valore indicato non è accettabile e quindi l'equazione in esame non ammette soluzione, per cui è impossibile;

b.2) se $k \neq \frac{5}{4}$, il valore $x = \frac{2}{4k-3}$ è accettabile come soluzione dell'equazione in esame ed è l'unica soluzione della stessa.

Es3)
$$\frac{k-2x}{x^2+3x} - \frac{2x-3k}{x^2-3x} + \frac{4}{x} = 0$$

Scomponendo in fattori i denominatori $x^2+3x = x(x+3)$, $x^2-3x = x(x-3)$, il m.c.d. è $x(x+3)(x-3)$ e l'equazione si riconduce alla forma seguente

$$\frac{(k-2x)(x-3) - (2x-3k)(x+3) + 4(x^2-9)}{x(x+3)(x-3)} = 0$$

Le condizioni di esistenza (C.E.) sono $x \neq 0$, $x \neq -3$, $x \neq 3$. Nel rispetto delle C.E. si può eliminare il denominatore e uguagliare a zero il numeratore.

$$(k-2x)(x-3)-(2x-3k)(x+3)+4(x^2-9)=0 \rightarrow 4kx=36-6k, \text{ da cui}$$

$$2kx=18-3k$$

Discussione

Sussistono i seguenti casi.

- a) Se $k=0$ l'equazione diventa $0x=18$, che è impossibile.
- b) Se $k \neq 0$ si ricava la radice $x = \frac{18-3k}{2k}$. Questo valore per essere accettabile come soluzione dell'equazione di partenza deve rispettare le C.E. Occorre dunque accertarsi che non ci siano valori di k diversi da zero per i quali l'espressione $\frac{18-3k}{2k}$ dia luogo ad uno dei valori 0, 3, -3 che non possono essere assunti da x .

Notiamo che:

$$\frac{18-3k}{2k} = 0, \text{ si verifica per } k=6;$$

$$\frac{18-3k}{2k} = 3, \text{ si verifica per } k=2;$$

$$\frac{18-3k}{2k} = -3, \text{ si verifica per } k=-6.$$

Possiamo allora concludere che:

- b.1) per $k \in \{-6; 2; 6\}$ il valore $x = \frac{18-3k}{2k}$ non è accettabile come soluzione dell'equazione e quindi l'equazione in esame è impossibile;
- b.2) per $k \notin \{-6; 0; 2; 6\}$ il valore $x = \frac{18-3k}{2k}$ è l'unica soluzione dell'equazione.