

Esercizi sui radicali

Es_1) Semplificare i seguenti radicali

a) $\sqrt{x^4 + 2x^2y + y^2} = \sqrt{(x^2 + y)^2} = |x^2 + y|$

b) $\sqrt[6]{x^2 - 2x + 1} = \sqrt[6]{(x-1)^2} = \sqrt[3]{|x-1|}$

c) $\sqrt[3]{a^3 - 6a^2 + 12a - 8} = \sqrt[3]{(a-2)^3} = a-2$

d) $\sqrt[6]{8a^3 + 12a^2 + 6a + 1} = \sqrt[6]{(2a+1)^3} = \sqrt{|2a+1|}$

e) $\sqrt{(x+5)^2} - \sqrt{x^2 - 6x + 9} = |x+5| - \sqrt{(x-3)^2} = |x+5| - |x-3|$

A questo punto occorre studiare il segno degli argomenti dei moduli.

$x+5 \geq 0$, per $x \geq -5$;

$x-3 \geq 0$, per $x \geq 3$.

Sussistono i seguenti casi:

e.1) per $x < -5$ si ha $|x+5| - |x-3| = -x-5 - (-x+3) = -8$;

e.2) per $-5 \leq x < 3$ si ha $|x+5| - |x-3| = x+5 - (-x+3) = 2x-2$;

e.2) per $x \geq 3$ si ha $|x+5| - |x-3| = x+5 - (x-3) = 8$

In **Figura 1** è rappresentata la funzione $f(x) = |x+5| - |x-3|$.

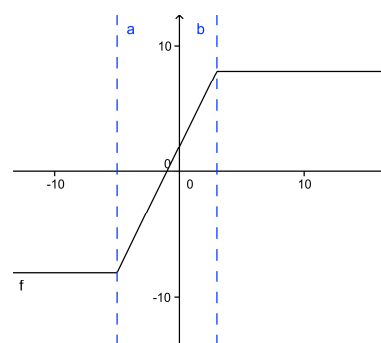


Figura 1

Es_2) Prodotti e quozienti di radicali; riduzione allo stesso indice

a) $E(x) = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt[3]{x-3}$ Ridurre ad un unico radicale

Prima di trasformare l'espressione osserviamo che essa ha senso solo se il radicando della radice quadrata è non negativo; imponendo questa condizione si trova che il dominio di definizione è l'intervallo $[1; +\infty[$. Ora notiamo che per $x < 3$ il radicale cubico assume valori negativi e quindi $E(x)$ assume valore negativo. Sussistono i seguenti casi:

a.1) per $1 \leq x < 3$ si ha $E(x) = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt[3]{x-3} = -\sqrt[6]{(x-1)^3 (x-3)^2}$;

a.2) per $x \geq 3$ si ha $E(x) = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt[3]{x-3} = \sqrt[6]{(x-1)^3 (x-3)^2}$

In **Figura 2** è rappresentata la funzione $y = E(x)$

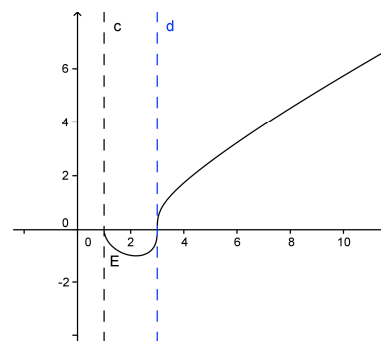


Figura 2

b) $E(x) = \sqrt{x-3} \cdot \sqrt[3]{4-x}$ Ridurre ad un unico radicale

Osserviamo che per l'esistenza dell'espressione nel campo reale deve esser soddisfatta la condizione $x-3 \geq 0$. Tenuta presente detta condizione sussistono i due seguenti casi:

b.1) per $3 \leq x \leq 4$ si ha $E(x) = \sqrt[6]{(x-3)^3 (4-x)^2}$;

b.2) per $x > 4$ si ha $E(x) = -\sqrt[6]{(x-3)^3 (4-x)^2}$

c) Semplificare la seguente espressione con radicali

$E(a) = \frac{\sqrt[5]{-a}}{\sqrt{a}} : \sqrt[3]{a^2}$

Osserviamo che l'espressione esiste se risulta $a > 0$ ed assume valori negativi in tutto il suo dominio. Si possono ridurre i radicali allo stesso minimo comune indice 30. Notiamo, però, che $\sqrt[5]{-a}$ si trasforma in questo modo $\sqrt[5]{-a} = -\sqrt[30]{a^6}$. Tutta l'espressione diventa:

$$E(a) = \frac{\sqrt[5]{-a}}{\sqrt{a}} : \sqrt[3]{a^2} = \frac{-\sqrt[30]{a^6}}{\sqrt[30]{a^{15}}} \cdot \frac{1}{\sqrt[30]{(a^2)^{10}}} = -\sqrt[30]{\frac{a^6}{a^{15} \cdot a^{20}}} = -\sqrt[30]{a^{-29}}$$

d) Semplificare la seguente espressione con radicali

$$E(x) = \left(\sqrt[3]{x} : \sqrt{-x} \right) : \sqrt[5]{\frac{1}{x}}$$

Osserviamo che l'espressione è definita solo per $x < 0$ ed assume valore positivo perché è composta da tre fattori dei quali, il primo ed il terzo sono negativi, il secondo è positivo. Elaboriamola nel suo dominio $D =]0; +\infty[$.

$$E(x) = \left(\sqrt[3]{x} : \sqrt{-x} \right) : \sqrt[5]{\frac{1}{x}} = \left(-\sqrt[6]{x^2} : (-x)^3 \right) : \sqrt[5]{\frac{1}{x}} = -\sqrt[6]{-x^{-1}} \cdot \sqrt[5]{x} = -\sqrt[30]{(-x^{-1})^5} \cdot \left(-\sqrt[30]{x^6} \right) =$$

$$\sqrt[30]{-x^{-5} \cdot x^6} = \sqrt[30]{-x}$$