

Esercizi sulle equazioni reciproche, sulle disequazioni di grado superiore al secondo e sulle disequazioni fratte

Es_1) Un'equazione reciproca di quarto grado ha tra le sue radici i valori $-\frac{1}{2}$, 2 .

- Precisare il tipo di equazione reciproca.
- Scrivere l'espressione dell'equazione ridotta alla forma normale e risolverla per verificare la correttezza del risultato.

Soluzione

L'equazione sarà reciproca di prima specie in quanto deve contenere tra le sue radici anche i valori -2 e $\frac{1}{2}$, mentre, com'è noto, un'equazione di quarto grado reciproca di seconda specie contiene tra le sue radici i valori $+1$, -1 . Si determina l'equazione ricorrendo alla fattorizzazione del primo membro:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-2)(x+2)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0 \rightarrow (4x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0 \rightarrow 4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$$

L'equazione ottenuta è addirittura un'equazione biquadratica.
Omettiamo la risoluzione dell'equazione.

Es_2) Determinare i valori che può assumere il parametro k affinché la seguente equazione sia reciproca

$$2x^5 + k^2x^4 - (2k-1)x^3 + (2-k)x^2 - x - 2 = 0$$

Per i valori determinati risolvere l'equazione corrispondente.

Soluzione

Determinazione del valore del parametro

Osserviamo che l'equazione può essere solo reciproca di seconda specie in quanto i termini estremi hanno coefficienti opposti, per cui devono essere opposti anche i coefficienti degli altri termini equidistanti dagli estremi. Il parametro k deve verificare le due seguenti condizioni

$$k^2 = -(-1) \quad (1)$$

$$2k - 1 = 2 - k \quad (2)$$

dalle quali si deduce che deve essere $k=1$

L'equazione reciproca che si ottiene è la seguente

$$2x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x - 2 = 0$$

Risoluzione dell'equazione

L'equazione ammette la radice fissa $x=1$ e dopo aver eseguito la divisione

$$(2x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x - 2) : (x-1)$$

si perviene alla seguente equazione reciproca di quarto grado di prima specie

$$2x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow 2x^2 + 3x + 2 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} = 0 \rightarrow 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$$

$$\text{Ponendo } x + \frac{1}{x} = y \rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = y^2 - 2$$

si passa all'equazione ausiliaria

$$2(y^2 - 2) + 3y + 2 = 0 \rightarrow 2y^2 + 3y - 2 = 0 \rightarrow y_1^1 = \frac{-3 \pm 5}{4} \rightarrow y_1 = -2, y_2 = \frac{1}{2}$$

Si devono ora risolvere le due seguenti equazioni nell'incognita x :

$$x + \frac{1}{x} = -2 \rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = -1;$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \rightarrow 2x^2 - x + 2 = 0 \rightarrow x_4 = \frac{1 \pm i\sqrt{15}}{4}$$

Es_3) Risolvere la disequazione ed il sistema di disequazioni proposti.

$$\text{a) } \frac{3x^3 + 7x^2 - 7x - 3}{9 - x^2} \geq 0 \quad \text{b) } \begin{cases} x^4 - |x|x^2 > 0 \\ x^2 - \frac{4}{x^2} < 0 \end{cases}$$

Soluzione

- a) Per risolvere la disequazione è necessario scomporre in fattori il polinomio di terzo grado che figura al numeratore. Uguagliandolo a zero per trovarne gli zeri osserviamo che si ottiene un'equazione reciproca di terzo grado di seconda specie, che com'è noto ammette la radice fissa $x=1$. Questa considerazione permette di ottenere una prima scomposizione in fattori velocemente eseguendo la divisione $(3x^3 + 7x^2 - 7x - 3):(x-1)$, magari applicando la regola di Ruffini. Di seguito scomponiamo il polinomio con raccoglimenti parziali e successivi. Si ha:

$$3x^3 + 7x^2 - 7x - 3 = 3(x^3 - 1) + 7x(x-1) = 3(x-1)(x^2 + x + 1) + 7x(x-1) = (x-1)(3x^2 + 10x + 3)$$

Risolviamo l'equazione di secondo grado

$$3x^2 + 10x + 3 = 0 \rightarrow x_2 = \frac{-5 \pm \sqrt{25-9}}{3} = \frac{-5 \pm 4}{3} \rightarrow x_1 = -3, x_2 = -\frac{1}{3}$$

e utilizziamo le radici per scomporre in fattori il polinomio al numeratore. Si perviene alla seguente forma per la disequazione

$$\frac{(3x+1)(x+3)(x-1)}{(x+3)(3-x)} \geq 0$$

che con la condizione $x \neq -3$ può essere semplificata riducendola alla forma

$$\frac{(3x+1)(x-1)}{3-x} \geq 0$$

Passando allo studio del segno di ciascun fattore presente al numeratore o al denominatore si determinano le soluzioni.

Riportiamo direttamente l'insieme delle soluzioni senza ulteriori elaborazioni.

$$S =]-\infty; -3[\cup \left]-3; -\frac{1}{3}\right] \cup [1; 3[$$

- b) La **prima disequazione** del sistema deve essere risolta discutendo il segno dell'argomento del modulo. Riconosciuto che $x=0$ non rientra nel dominio di definizione della seconda disequazione del sistema, risolvendo la prima disequazione per $x>0$ si trova come insieme di soluzioni $A =]1; +\infty[$; per $x<0$ la stessa disequazione è soddisfatta nell'insieme $B =]-\infty; -1[$.

La disequazione è dunque soddisfatta nell'insieme $S_1 = A \cup B$.

Per la **seconda disequazione** del sistema osserviamo che possiamo scrivere

$$x^2 - \frac{4}{x^2} < 0 \rightarrow \frac{x^4 - 4}{x^2} < 0 \rightarrow \frac{(x^2 + 2)(x^2 - 2)}{x^2} < 0$$

Poiché abbiamo già precisato che deve risultare $x \neq 0$, con questa condizione la disequazione è equivalente alla seguente $x^2 - 2 < 0$, il cui insieme di soluzioni è $]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[$.

Concludiamo che la seconda disequazione del sistema è soddisfatta nell'insieme

$$S_2 =]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[- \{0\}.$$

Insieme delle soluzioni del sistema

L'insieme S delle soluzioni del sistema in esame è

$$S = S_1 \cap S_2 =]-\sqrt{2}; -1[\cup]1; \sqrt{2}[$$