

Equazioni con moduli per il biennio del Liceo Scientifico

Risolvere le seguenti equazioni, contenenti uno o più moduli, anche annidati fino al terzo livello, che ridotte alla forma normale si presentano di primo grado.

- | | |
|----------------------------------|--|
| 1) $ x-1 = 2+x - x$ | $S = \{-3; -1; 3\}$ |
| 2) $ 1 - 1-x = x$ | $S = [0; 1]$ |
| 3) $2 x - 2x-1 - x-1 = 1$ | $S = \{0; 2\}$ |
| 4) $ x - x - x+1 = 1$ | $S = \{0; 2\}$ |
| 5) $\frac{ x-1 }{ x+1 -2} = -1$ | $S = [-1; 1[$ |
| 6) $ 2 - 2-3x + 3 x-1 = x$ | $S = \left\{1; \frac{7}{5}\right\}$ |
| 7) $3 x - 2-x = 2x$ | $S = \left\{\frac{3}{4}; \frac{3}{2}; 3\right\}$ |
| 8) $ x + x - x-1 = 1$ | $S = \left\{0; \frac{2}{3}\right\}$ |
| 9) $\frac{ x-1 }{ x+1 -2} = 1$ | $S =]1; +\infty[$ |
| 10) $\frac{x 2x+3 }{4x^2-9} = 2$ | $S = \{2\}$ |

Soluzioni

E1) $|x-1| = |2+x| - x$

Studiando il segno degli argomenti dei due valori assoluti si ha:

$x-1 \geq 0$, che è soddisfatta per $x \geq 1$;

$2+x \geq 0$, che è soddisfatta per $x \geq -2$.

Si deve studiare l'equazione in ciascuno dei seguenti intervalli: $I_1 =]-\infty; -2[$, $I_2 = [-2; 1[$,

$I_3 = [1; +\infty[$.

Primo intervallo $I_1 =]-\infty; -2[$

La forma dell'equazione è la seguente:

$$-(x-1) = -(2+x) - x \rightarrow -x+1 = -2-x-x \rightarrow x = -3$$

Il valore trovato è accettabile come soluzione dell'equazione.

Secondo intervallo $I_2 = [-2; 1[$

La forma dell'equazione è la seguente:

$$-(x-1) = (2+x) - x \rightarrow -x+1 = 2+x-x \rightarrow x = -1$$

Il valore trovato è accettabile come soluzione dell'equazione.

Terzo intervallo $I_3 = [1; +\infty[$

La forma dell'equazione è la seguente:

$$(x-1) = (2+x) - x \rightarrow x = 3$$

Il valore trovato è accettabile come soluzione dell'equazione.

Conclusione

L'insieme delle soluzioni dell'equazione è $S = \{-3; -1; 3\}$

*** **

E2) $|1 - |1-x|| = x$

Osserviamo subito che il primo membro è non negativo e quindi gli eventuali valori di x che saranno soluzioni dell'equazione dovranno essere non negativi: $x \geq 0$.

Si deve studiare il segno dell'argomento del valore assoluto più interno (annidato):

$1-x \geq 0$, soddisfatta per $x \leq 1$.

Studio nell'intervallo $[0; 1]$

La forma dell'equazione è:

$$|1 - (1-x)| = x \rightarrow |x| = x \quad \text{L'uguaglianza è soddisfatta da ogni punto dell'intervallo considerato.}$$

Studio nell'intervallo: $]1; +\infty[$

La forma dell'equazione è:

$$|1 - (x-1)| = x \rightarrow |2-x| = x$$

Si devono distinguere i due seguenti sottocasi:

a) Per $x \in]1; 2] \rightarrow 2-x = x \rightarrow x = 1$ Il valore non è accettabile come soluzione dell'equazione.

b) Per $x \in]2; +\infty[\rightarrow x-2 = x$ Quest'equazione non ha soluzioni.

Conclusione

L'equazione in esame ammette come insieme di soluzioni l'intervallo $S = [0; 1]$

*** **

E3) $2|x - |2x-1|| - |x-1| = 1$

Analizzando il segno del modulo più interno si ha:

se $2x-1 < 0$, cioè per $x < \frac{1}{2}$, l'equazione assume la forma

$$2|3x-1|-|x-1|=1; \quad (a)$$

se $2x-1 \geq 0$, cioè con $x \geq \frac{1}{2}$, l'equazione diventa

$$2|-x+1|-|x-1|=1 \rightarrow |x-1|=1 \quad (b)$$

L'equazione (a) va ulteriormente analizzata, studiando i segni degli argomenti dei due moduli limitatamente ad $x < \frac{1}{2}$.

Osservato che $3x-1$ cambia segno nell'intervallo $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$, sussistono i seguenti casi:

a.1) per $x < \frac{1}{3}$ si ha l'equazione $2(-3x+1)-(-x+1)=1 \rightarrow -5x=0 \rightarrow x=0$

Il valore trovato è accettabile come soluzione.

a.2) per $\frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{2}$ si ha l'equazione $2(3x-1)-(-x+1)=1 \rightarrow 7x=4 \rightarrow x=\frac{4}{7}$

Il valore ottenuto non appartiene all'intervallo in esame, dunque non è accettabile.

Concludiamo che nell'intervallo $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$ l'equazione ammette la sola soluzione $x=0$.

Studio dell'equazione (b)

Osserviamo che l'equazione è soddisfatta se $x-1=1$ oppure $x-1=-1$, cioè per $x=2$ oppure $x=0$. Poiché si sta analizzando l'equazione per $x \geq \frac{1}{2}$ evidentemente va accettata solo $x=2$.

Conclusione generale

L'equazione in esame ammette come insieme delle soluzioni $S=\{0;2\}$

*** **

E4) $|x-|x-|x+1||=1$

L'equazione presenta dei moduli annidati. Partiamo dall'argomento del modulo più interno.

Si hanno i seguenti casi:

A) per $x+1 < 0$ l'equazione diventa: $|x-|x-(-x-1)||=1 \rightarrow |x-|2x+1||=1;$

B) per $x+1 \geq 0$ l'equazione diventa: $|x-|x-x-1||=1 \rightarrow |x-1|=1.$

Discutiamo il caso A)

Poiché per $x < -1$ risulta anche $2x+1 < 0$ l'equazione assume la seguente forma:

$$|x-(-2x-1)|=1, \text{ cioè } |3x+1|=1;$$

l'uguaglianza ottenuta è soddisfatta se e solo se risulta $3x+1=1$, cioè per $x=0$, oppure se

$3x+1=-1$, cioè per $x=-\frac{2}{3}$. Poiché nessuno dei due valori ottenuti verifica la limitazione $x < -1$,

si conclude che nell'intervallo $]-\infty; -1[$ l'equazione non ammette soluzioni.

Discutiamo il caso B)

I valori di x che soddisfano l'uguaglianza sono quelli per i quali risulta $(x-1=1)$ oppure $(x-1=-1)$, dunque per $x=2$ oppure $x=0$. Poiché entrambi i valori verificano la limitazione $x+1 \geq 0$, concludiamo che si accettano come soluzioni.

Conclusione generale- L'insieme delle soluzioni dell'equazione in esame è $S=\{0;2\}$.

*** **

Es_5) $\frac{|x-1|}{|x+1|-2} = -1$

Premesso che l'equazione ha senso per i valori di x che non annullano il denominatore, quindi deve essere $|x+1|-2 \neq 0$, per determinare le eventuali soluzioni si devono discutere i segni degli argomenti dei due moduli.

$x-1 \geq 0$, per $x \geq 1$;

$x+1 \geq 0$, per $x \geq -1$.

La condizione $|x+1|-2 \neq 0$ equivale alla seguente $x+1 \neq \pm 2$ che è soddisfatta nell'insieme $D = \mathbb{R} - \{-3; 1\}$. L'insieme D è il **dominio di definizione dell'equazione**.

Limitatamente ai valori $x \in D$ studiamo l'equazione in ciascuno degli intervalli $I_1 =]-\infty; -1[$,

$I_2 = [-1; 1[$, $I_3 = [1; +\infty[$.

- Studio nell'intervallo $I_1 =]-\infty; -1[$

L'equazione assume la seguente forma:

$$\frac{-x+1}{-x-1-2} = -1 \rightarrow \frac{x-1}{x+3} = -1 \rightarrow x-1 = -x-3 \rightarrow x = -1$$

Poiché $-1 \notin I_1$ il valore non è accettabile come soluzione per l'equazione.

- Studio nell'intervallo $I_2 = [-1; 1[$

L'equazione assume la forma:

$$\frac{-x+1}{x+1-2} = -1 \rightarrow \frac{1-x}{x-1} = -1.$$

L'uguaglianza è soddisfatta per ogni $x \neq 1$, dunque anche per ogni x di I_2 . A questo punto osserviamo che $I_2 \subseteq D$ e quindi ogni elemento di I_2 è soluzione dell'equazione.

- Studio nell'intervallo $I_3 = [1; +\infty[$

La forma dell'equazione è

$$\frac{x-1}{x+1-2} = -1 \rightarrow \frac{x-1}{x-1} = -1 \rightarrow 1 = -1, \text{ uguaglianza evidentemente falsa; dunque in } I_3 \text{ non}$$

esistono soluzioni per l'equazione.

Conclusione generale- L'insieme delle soluzioni dell'equazione è $S = I_2 = [-1; 1[$

*** **

Equazioni proposte

Delle equazioni che seguono riportiamo solo i risultati, lasciando al lettore come esercizio il compito di risolverle.

$$|2 - |2 - 3x|| + 3|x-1| = x \quad (\text{Si osservi che deve risultare } x \geq 0)$$

$$S = \left\{1; \frac{7}{5}\right\}$$

$$3|x - |2 - x|| = 2x$$

$$S = \left\{\frac{3}{4}; \frac{3}{2}; 3\right\}$$

$$|x + |x - |x-1|| = 1$$

$$S = \left\{0; \frac{2}{3}\right\}$$

$$\frac{|x-1|}{|x+1|-2} = 1$$

$$S =]1; +\infty[$$

$$\frac{x|2x+3|}{4x^2-9} = 2$$

$$S = \{2\}$$