

Risoluzione e discussione di un'equazione razionale fratta letterale

Risolvere e discutere le seguente equazione

$$\frac{x}{x+a} - \frac{2x^2}{x^2-a^2} = 1$$

Soluzione

- Ricordiamo che quando si ha un'equazione fratta è necessario determinare il **dominio di definizione**, ovvero i valori che è possibile attribuire alla variabile (incognita) per i quali ha senso l'equazione. Si tratta dunque di stabilire quali siano le condizioni di esistenza (C.E.).
Al fine di determinare agevolmente le C.E. è opportuno scomporre in fattori i denominatori delle singole frazioni che compaiono nell'equazione; ciò fatto, **le C.E. si otterranno imponendo che sia diverso da zero ciascun fattore che compare in almeno un denominatore.**

Scomponendo in fattori il denominatore della seconda frazione si ottiene la seguente forma

$$\frac{x}{x+a} - \frac{2x^2}{(x-a)(x+a)} = 1 \quad (1)$$

A questo punto si impongono le C.E. che sono:

$$x-a \neq 0 \Leftrightarrow x \neq a; \quad (2)$$

$$x+a \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -a \quad (3)$$

Ebbene, l'equazione in esame ha senso se alla variabile (incognita x) si assegnano valori diversi da a e da $-a$.

Possiamo ora procedere alla semplificazione dell'equazione.

Si trasporta al primo membro il termine costante 1 e si esegue la somma riducendo i termini simili.

$$\frac{x(x-a) - 2x^2 - (x-a)(x+a)}{(x+a)(x-a)} = 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2 - ax + a^2}{(x+a)(x-a)} = 0 \quad (4)$$

- A questo punto osserviamo che una frazione assume il valore zero se il suo numeratore è nullo ed il suo denominatore è diverso da zero. Ebbene, poiché nel dominio di definizione dell'equazione il denominatore della frazione al primo membro è diverso da zero deduciamo che l'uguaglianza (4) si trasforma in una equivalente ponendo

$$-2x^2 - ax + a^2 = 0, \text{ ed in definitiva,}$$

$$2x^2 + ax - a^2 = 0 \quad (5)$$

L'equazione ottenuta è di secondo grado e per risolverla⁽¹⁾ è necessario scomporre il primo membro in fattori di primo grado. Allo scopo lo studente può servirsi del teorema del resto di Ruffini e riconoscere che $x=-a$ annulla il polinomio al primo membro, quindi eseguire la divisione $(2x^2 + ax - a^2) : (x+a)$ il cui quoziente è

$$Q(x) = (2x - a). \text{ L'equazione (5) si scrive allora nella forma seguente}$$

$$(x+a)(2x-a) = 0 \quad (6)$$

Applicando la legge di annullamento del prodotto si ricavano i valori delle radici:

¹⁰ L'esercizio che stiamo risolvendo è destinato a studenti del primo anno della secondaria superiore i quali ancora non conoscono le equazioni di secondo grado, pertanto è necessario scomporre il primo membro in fattori di primo grado ed applicare successivamente la legge di annullamento del prodotto.

$$x + a = 0 \Rightarrow x_1 = -a, \quad \text{primo valore;}$$

$$2x - a = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{a}{2}, \quad \text{secondo valore}$$

- **Discussione sull'accettabilità delle radici x_1, x_2 .**

Teniamo ora presente che i valori delle radici x_1, x_2 trovati per essere accettabili devono soddisfare le C.E. che abbiamo impostato prima. Ebbene, si vede che x_1 deve essere scartato perché contrasta con la condizione (3); rimane da effettuare il controllo per x_2 . Osserviamo che

$$x_2 = \frac{a}{2} = a \Leftrightarrow a = 0 \text{ e } x_2 = \frac{a}{2} = -a \Leftrightarrow a = 0$$

per cui deduciamo che il valore della seconda radice coincide con i due valori che sono da escludere proprio per $a=0$.

Possiamo a questo punto concludere l'esercizio affermando che:

se $a \neq 0$ l'equazione ammette come soluzione il valore $x = \frac{a}{2}$;

se $a = 0$ l'equazione è impossibile, cioè il suo insieme di soluzioni è vuoto.