

Equazioni Parametriche di secondo grado

Regola di CARTESIO

In relazione alla seguente equazione parametrica

$$(k+1)x^2 - 2kx + k - 3 = 0$$

risolvere i quesiti che seguono.

1.1 Discutere al variare di k la realtà ed il segno delle radici.

1.2 Stabilire per quali valori del parametro le radici sono concordi.

1.3 Trovare i valori del parametro k per i quali le due radici hanno lo stesso modulo e determinare i corrispondenti valori delle radici.

1.4 Trovare i valori del parametro k per i quali la somma dei reciproci dei quadrati delle radici

vale $\frac{34}{25}$. Per i valori del parametro ottenuti stabilire se le radici sono reali ed in caso

affermativo indicare il loro segno.

Soluzione

1.1 La discussione della realtà e del segno delle radici di un'equazione di secondo grado parametrica si effettua applicando la regola di Cartesio, per la qual cosa è necessario studiare il segno del discriminante del trinomio associato ed il segno dei coefficienti dello stesso al variare del parametro k . Si ha:

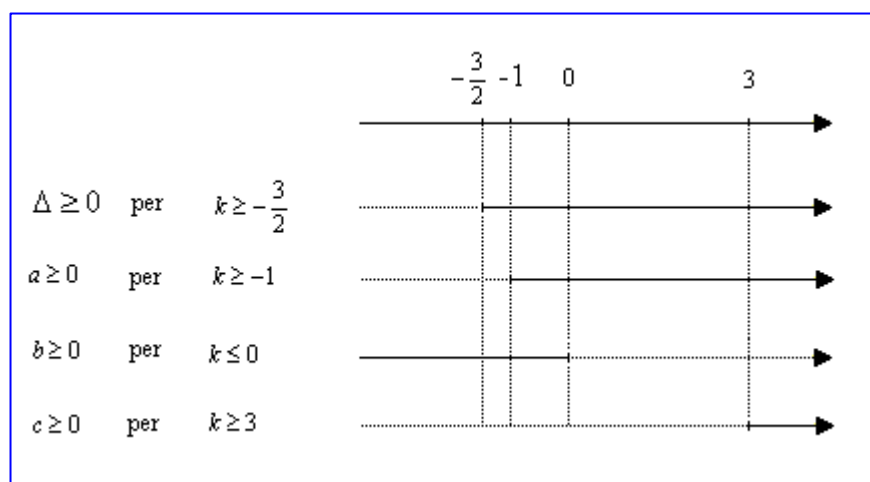
$$\frac{\Delta}{4} = k^2 - (k+1)(k-3) \geq 0 \rightarrow 2k+3 \geq 0 \rightarrow k \geq -\frac{3}{2};$$

$$a = k+1 \geq 0 \rightarrow k \geq -1;$$

$$b = -2k \geq 0 \rightarrow k \leq 0;$$

$$c = k-3 \geq 0 \rightarrow k \geq 3.$$

Nella figura riportata a lato è rappresentata la variabilità del segno del discriminante e dei coefficienti del trinomio. Con riferimento a detta figura possiamo discutere la realtà ed il segno delle radici dell'equazione in esame. Sussistono i seguenti casi:



- 1) Per $k < -\frac{3}{2}$, il discriminante è negativo, dunque l'equazione non ammette radici reali. Le due radici sono complesse coniugate.
- 2) Per $k = -\frac{3}{2}$, il discriminante si annulla, dunque le radici sono reali e coincidenti, ma poiché sussistono due variazioni, le due radici saranno positive.
- 3) Per $-\frac{3}{2} < k < -1$, il discriminante è positivo, dunque le radici sono reali e distinte; poiché si hanno due variazioni le due radici sono entrambe positive.

- 4) Per $k = -1$, si annulla il coefficiente del termine di secondo grado e l'equazione diventa di primo grado; l'unica radice ammessa è positiva perché i coefficienti d e c sono discordi.
- 5) Per $-1 < k < 0$, il discriminante è positivo, si ha una permanenza ed una variazione, con la permanenza che precede la variazione. Le due radici sono una negativa e l'altra positiva; quella negativa ha maggiore valore assoluto.
- 6) Per $k = 0$, il discriminante è positivo, si annulla il coefficiente del termine di primo grado (l'equazione diventa pura) ed ammette due radici reali ed opposte.
- 7) Per $0 < k < 3$, il discriminante è positivo, vi sono una variazione ed una permanenza, dunque si hanno due radici reali, una positiva ed una negativa, con quella positiva che ha valore assoluto maggiore.
- 8) Per $k = 3$, il discriminante è positivo, si annulla il termine noto, per cui l'equazione diventa spuria. Delle due radici una è nulla e l'altra è positiva perché i coefficienti a e b sono discordi (variazione).
- 9) Per $k > 3$, il discriminante è positivo, le due radici sono reali e distinte e poiché si hanno due variazioni saranno entrambe positive.

1.2 Osserviamo che se le radici sono concordi allora sono necessariamente numeri reali, quindi il discriminante dell'equazione deve essere non negativo: $\Delta \geq 0$; a questa condizione si deve aggiungere quella data dal prodotto delle radici, che dovrà essere positivo. Risolvendo il sistema di dette condizioni algebriche si ricava la risposta.

$$\begin{cases} \frac{\Delta}{4} = k^2 - (k+1)(k-3) \geq 0 \\ p = \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2k+3 \geq 0 \\ \frac{k-3}{k+1} > 0 \end{cases}$$

Il sistema è soddisfatto dai valori del parametro appartenenti all'insieme

$$S = \left[-\frac{3}{2}; -1 \right] \cup]3; +\infty[$$

1.3 Le radici hanno lo stesso modulo se e solo se sono uguali oppure sono opposte.

1.3.1 Sono uguali se il discriminante dell'equazione è nullo ($\Delta=0$) e ciò si verifica per

$k = -\frac{3}{2}$. In questo caso il valore delle radici è: $x_1 = x_2 = 3$.

1.3.2 Le radici sono opposte se la loro somma è nulla e ciò si verifica se si annulla il coefficiente del termine di primo grado; deve essere $k=0$. Per questo valore risulta

$$x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = \sqrt{3}.$$

$$1.4 \quad \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{34}{25} \rightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{34}{25} \rightarrow \frac{b^2 - 2ac}{c^2} = \frac{34}{25} \rightarrow \dots 4k^2 + 76k - 39 = 0$$

Risolvendo l'equazione si ricavano i due valori:

$$k_1 = \frac{1}{2}, \quad k_2 = -\frac{39}{2}$$

Per $k = k_1$ le due radici sono reali e distinte, una è positiva e l'altra è negativa. Poiché nella combinazione dei segni dei coefficienti la variazione precede la permanenza, la radice positiva avrà valore assoluto maggiore rispetto alla radice negativa.

Per $k = k_2$ le corrispondenti radici dell'equazione sono complesse coniugate perché il discriminante è negativo.