

Equazioni e sistemi di equazioni di primo grado a coefficienti irrazionali

Equazioni

1) $2\sqrt{3}x = \sqrt{12} + \sqrt{6}x$

Elaborazioni

I tre coefficienti che compaiono nell'equazione sono divisibili per $\sqrt{3}$ e l'equazione si può semplificare riconducendola alla forma

$$2x = 2 + \sqrt{2}x$$

dalla quale si ha

$$x = \frac{2}{2 - \sqrt{2}}, \text{ quindi, razionalizzando il denominatore, } x = \frac{2}{2 - \sqrt{2}} \cdot \frac{2 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2}$$

2) $\sqrt{6}x - 2\sqrt{3} + x\sqrt{3} = \sqrt{6}$

Elaborazioni

$$\sqrt{6}x - 2\sqrt{3} + x\sqrt{3} = \sqrt{6} \rightarrow (\sqrt{6} + \sqrt{3})x = \sqrt{6} + 2\sqrt{3} \rightarrow$$

$$x = \frac{\sqrt{6} + 2\sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{2} + 2)}{\sqrt{3}(\sqrt{2} + 1)} = \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})}{(\sqrt{2} + 1)} = \sqrt{2}$$

3) $\sqrt{5}x + \sqrt{10} = \sqrt{2}x + 5$

Elaborazioni

$$x = \frac{5 - \sqrt{10}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \frac{(5 - \sqrt{10})(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2})} = \frac{3\sqrt{5}}{5 - 2} = \sqrt{5}$$

4) $\sqrt{10}(x + \sqrt{5}) - 5x = 5\sqrt{5}$

Elaborazioni

Scriviamo l'equazione nella forma

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}(x + \sqrt{5}) - (\sqrt{5})^2 x = 5\sqrt{5}$$

e semplifichiamo il fattore $\sqrt{5}$. Risolviamo l'equazione ottenuta :

$\sqrt{2}(x + \sqrt{5}) - \sqrt{5}x = 5 \rightarrow \sqrt{2}x - \sqrt{5}x = 5 - \sqrt{10} \rightarrow x = \frac{5 - \sqrt{10}}{\sqrt{2} - \sqrt{5}}$, si procede con la razionalizzazione del denominatore.

$$x = \frac{5 - \sqrt{10}}{\sqrt{2} - \sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{2} + 5\sqrt{5} - 2\sqrt{5} - 5\sqrt{2}}{2 - 5}, \text{ quindi } x = \frac{3\sqrt{5}}{-3} = -\sqrt{5}$$

5) $\sqrt{3}x - 2 = -x - \sqrt{3}$

Elaborazioni

$\sqrt{3}x - 2 = -x - \sqrt{3}$ diventa $(\sqrt{3} + 1)x = 2 - \sqrt{3}$, da cui $x = \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1}$.

Procedendo con la razionalizzazione del denominatore si ha

$$x = \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{3\sqrt{3} - 5}{2}$$

6) $\frac{x}{\sqrt{6} - \sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = 0$

Elaborazioni

$$\frac{x}{\sqrt{6} - \sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = 0 \rightarrow \frac{x}{\sqrt{6} - \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \rightarrow x = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{3}$$

7) Nell'equazione parametrica $(\sqrt{2} - m)x + \sqrt{3} = 0$, determinare il valore da assegnare al parametro m in modo che la soluzione dell'equazione sia $x = -\sqrt{6}$.

Soluzione

Imponendo che $x = -\sqrt{6}$ sia la soluzione dell'equazione si ottiene l'equazione nell'incognita m

$(\sqrt{2} - m)(-\sqrt{6}) + \sqrt{3} = 0$, dalla quale si ha $(\sqrt{2} - m)\sqrt{2} = 1$ e quindi

$$m = \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

8) Considerate le due equazioni parametriche

a) $5mx = 2$, b) $\sqrt{6}x + 1 = 3mx$,

stabilire se esiste qualche valore del parametro m per il quale le due equazioni ammettono la stessa soluzione.

Soluzione

L'equazione a) ammette soluzione se $m \neq 0$ e risulta $x = \frac{2}{5m}$.

L'equazione b) ridotta alla forma normale diventa $(3m - \sqrt{6})x = 1$ e ammette soluzione solo con $m \neq \frac{\sqrt{6}}{3}$ e la soluzione è $x = \frac{1}{3m - \sqrt{6}}$.

Si tratta di vedere se con le due condizioni indicate per il parametro m sussiste l'uguaglianza

$$\frac{1}{3m - \sqrt{6}} = \frac{2}{5m}$$

Elaborando l'uguaglianza ottenuta si ha

$$5m = 6m - 2\sqrt{6}, \text{ da cui } m = 2\sqrt{6}$$

Ponendo dunque nelle due equazioni $m = 2\sqrt{6}$ le stesse diventano equivalenti e la radice comune è

$$x = \frac{2}{5m} \rightarrow x = \frac{2}{5 \cdot 2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{30}$$

Sistemi di equazioni

- 1) Risolvere il seguente sistema di equazioni a coefficienti irrazionali

$$\begin{cases} \sqrt{10}x - y = \sqrt{5} \\ x + \sqrt{5}y = \sqrt{2} + 5 \end{cases}$$

Soluzione

Utilizziamo il metodo di sostituzione ricavando y dalla prima equazione e sostituendone l'espressione nella y della seconda equazione.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sqrt{10}x - y = \sqrt{5} \\ x + \sqrt{5}y = \sqrt{2} + 5 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} y = \sqrt{10}x - \sqrt{5} \\ x + \sqrt{5}(\sqrt{10}x - \sqrt{5}) = \sqrt{2} + 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \sqrt{10}x - \sqrt{5} \\ x + 5\sqrt{2}x - 5 = \sqrt{2} + 5 \end{cases} \rightarrow \\ \begin{cases} y = \sqrt{10}x - \sqrt{5} \\ x = \frac{10 + \sqrt{2}}{5\sqrt{2} + 1} = \frac{5(\sqrt{2})^2 + \sqrt{2}}{5\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{2}(5\sqrt{2} + 1)}{5\sqrt{2} + 1} \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} y = \sqrt{10}x - \sqrt{5} \\ x = \sqrt{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = \sqrt{10} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{5} = \sqrt{5} \end{cases} \end{aligned}$$

2) Risolvere il sistema assegnato utilizzando il **metodo di Cramer**

$$\begin{cases} x - 8\sqrt{2}y = 18 \\ 3x + \sqrt{6}y = 6 - 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Soluzione

Calcoliamo i tre determinanti D , D_x , D_y i cui valori occorrono per trovare i valori di x e y .

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -8\sqrt{2} \\ 3 & \sqrt{6} \end{vmatrix} = \sqrt{6} + 24\sqrt{2}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 18 & -8\sqrt{2} \\ 6 - 2\sqrt{3} & \sqrt{6} \end{vmatrix} = 2(\sqrt{6} + 24\sqrt{2})$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 18 \\ 3 & 6 - 2\sqrt{3} \end{vmatrix} = -2(24 + \sqrt{3})$$

Avendo ottenuto $D \neq 0$ si conclude che il sistema è determinato ed ammette una sola soluzione che è

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{2(\sqrt{6} + 24\sqrt{2})}{\sqrt{6} + 24\sqrt{2}} = 2$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-2(24 + \sqrt{3})}{\sqrt{6} + 24\sqrt{2}} = \frac{-2(24 + \sqrt{3})}{(\sqrt{3} + 24)\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$