

Equazioni parametriche di secondo grado

(Sulle relazioni tra coefficienti e radici)

Richiami teorici

Per l'equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

sussistono le due seguenti notevoli relazioni tra i coefficienti e le radici x_1, x_2 :

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad (1), \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad (2)$$

* * * * *

Es2) In relazione all'equazione parametrica $kx^2 + (3-2k)x + k+1 = 0$ risolvere i quesiti che seguono.

Q1- Determinare il valore di k per il quale risulta $x_1 = -\frac{1}{2}$ e senza risolvere la corrispondente equazione numerica determinare il valore della seconda radice. [Risp.: $k=2/9$; $x_2=-11$]

Q2-Trovare k in modo che le due radici siano uguali e determinare i valori delle stesse.

Q3-Trovare i valori di k in modo che la somma dei reciproci delle radici sia uguale a $-23/11$ [Risp.: $k=2/9$]

Q4-Trovare per quali valori del parametro k la somma dei quadrati delle radici è uguale a 10 e calcolare i valori delle radici stesse.

Q5- Trovare, se esistono, i valori del parametro k per i quali una radice è doppia dell'altra. [Risp.: esistono due valori per k]

Soluzione

Q1- Imponiamo che il valore $-\frac{1}{2}$ sia soluzione dell'equazione per trovare la condizione cui deve soddisfare il parametro k .

$$k\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (3-2k)\left(-\frac{1}{2}\right) + k+1 = 0, \text{ da cui } 9k-2=0, \text{ quindi } k = \frac{2}{9}.$$

L'equazione corrispondente al valore trovato per il parametro è:

$$2x^2 + 23x + 11 = 0$$

Valore della seconda radice

Per determinare il valore della seconda radice x_2 , conoscendo la prima, possiamo utilizzare la relazione sul prodotto tra le radici e i coefficienti dell'equazione.

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{11}{2}, \text{ da cui } x_2 = \frac{P}{x_1} = \frac{11}{2} : \left(-\frac{1}{2}\right) = -11$$

Q2-Le radici di un'equazione di secondo grado sono uguali se e solo se il discriminante dell'equazione è nullo. Perciò,

$$\Delta = b^2 - 4ac = (3 - 2k)^2 - 4k(k + 1) = 0, \text{ che semplificata diventa}$$

$$-16k + 9 = 0, \text{ soddisfatta da } k = \frac{9}{16}.$$

L'equazione corrispondente è

$$9x^2 + 30x + 25 = 0$$

Ricerca dei valori delle radici

Osserviamo che il primo membro dell'equazione ottenuta rappresenta lo sviluppo del quadrato di un binomio; l'equazione può assumere quindi la forma

$$(3x + 5)^2 = 0, \text{ dalla quale emerge che il valore comune delle due radici è } x = -\frac{5}{3}.$$

Q3- La relazione tra le radici dell'equazione parametrica deve essere la seguente:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{23}{11}$$

Elaborando il primo membro si ottiene la forma

$\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -\frac{23}{11}$, nella quale compaiono la somma e il prodotto delle radici. Tendendo conto delle relazioni (1), (2) riportate sopra, si può scrivere l'uguaglianza

$$-\frac{b}{a} : \frac{c}{a} = -\frac{23}{11}, \text{ da cui } \frac{b}{c} = \frac{23}{11}, \text{ cioè } \frac{3 - 2k}{k + 1} = \frac{23}{11}, \text{ con la condizione di equivalenza } a = k \neq 0.$$

Dall'equazione

$$\frac{3 - 2k}{k + 1} = \frac{23}{11} \text{ si ricava } k = \frac{2}{9};$$

il valore ottenuto coincide con quello trovato nella risoluzione del quesito Q1, dunque la corrispondente equazione è

$$2x^2 + 23x + 11 = 0,$$

e le radici sono $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = -11$.

Verifica della proprietà richiesta

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -2 + \frac{1}{-11} = -2 - \frac{1}{11} = -\frac{23}{11}$$

Q4-La condizione che si deve verificare per le radici è

$$x_1^2 + x_2^2 = 10, \quad (3)$$

e poiché sussiste l'uguaglianza

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2, \quad (4)$$

valida quali che siano i valori numerici x_1 , x_2 , tenendo conto delle relazioni (1), (2) tra i coefficienti e le radici dell'equazione in esame, possiamo esprimere la condizione indicata come segue

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 10, \text{ ovvero,}$$

$$\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = 10,$$

essendo **a**, **b**, **c** i coefficienti dell'equazione. In definitiva, il parametro **k** deve verificare la seguente uguaglianza:

$$\frac{(3-2k)^2}{k^2} - \frac{2(k+1)}{k} = 10 \quad (5)$$

La (5) ha senso con $k \neq 0$; questa condizione è quella che garantisce che l'equazione parametrica sia effettivamente di secondo grado e pertanto riteniamo che sia senz'altro verificata.

Semplificando la (5) si ottiene l'equazione equivalente

$$8k^2 + 14k - 9 = 0 \quad (5.1)$$

che ammette come soluzioni $k_1 = -\frac{9}{4}$, $k_2 = \frac{1}{2}$. Esistono dunque due valori diversi del parametro per i quali si hanno equazioni di secondo grado le cui radici verificano la condizione (3).

Distinzione dei due casi

- Caso $k = k_1 = -\frac{9}{4}$

Si ottiene l'equazione $-\frac{9}{4}x^2 + \frac{15}{2}x - \frac{5}{4} = 0$, cioè $9x^2 - 30x + 5 = 0$, le cui radici sono

$$x_2^1 = \frac{15 \pm 6\sqrt{5}}{9} = \frac{5 \pm 2\sqrt{5}}{3}, \text{ quindi } x_1 = \frac{5 - 2\sqrt{5}}{3} \text{ e } x_2 = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{3}.$$

- Caso $k = k_2 = \frac{1}{2}$

Si ottiene l'equazione

$$x^2 + 4x + 3 = 0, \text{ le cui radici sono } x_1 = -3, x_2 = -1.$$

Q5- Per determinare gli eventuali valori del parametro k per i quali le corrispondenti equazioni ammettono radici che sono l'una il doppio dell'altra, posto $x_2 = 2x_1$, si deve risolvere il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{2k-3}{k} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{k+1}{k} \end{cases}$$

Elaboriamo inizialmente le prime due equazioni per esprimere le radici x_1, x_2 in funzione del parametro k per poi sostituire le espressioni ottenute nella terza equazione del sistema.

$$\begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ x_1 + x_2 = \frac{2k-3}{k} \end{cases}, \text{ da cui si ottiene } \begin{cases} x_1 = \frac{2k-3}{3k} \\ x_2 = \frac{2(2k-3)}{3k} \end{cases}$$

La terza equazione del sistema diventa

$$\frac{2k-3}{3k} \cdot \frac{2(2k-3)}{3k} = \frac{k+1}{k}, \text{ che con } k \neq 0 \text{ si riduce alla seguente}$$

$$k^2 + 33k - 18 = 0,$$

$$\text{le cui soluzioni sono } k_1 = -\frac{33+3\sqrt{129}}{2}, k_2 = \frac{3\sqrt{129}-33}{2}.$$