

Equazioni parametriche di secondo grado

(Sulle relazioni tra coefficienti e radici)

Richiami teorici

Per l'equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

sussistono le due seguenti notevoli relazioni tra i coefficienti e le radici x_1, x_2 :

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad (1), \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad (2)$$

* * * * *

Es1) Considerata l'equazione parametrica $x^2 + 4kx - k + 3 = 0$ determinare i valori reali del parametro k per i quali sono soddisfatte le richieste riportate nei quesiti che seguono. In ciascun caso, una volta determinato il valore o i valori del parametro che verificano le richieste, trovare le espressioni delle corrispondenti equazioni e i valori delle relative radici quando le stesse sono reali.

Q1-Una radice sia $x_1 = -3$. [Risp. $k=12/13$]

Q2- Le radici dell'equazione siano reciproche tra loro. [Risp. $k=2$]

Q3- Le radici dell'equazione siano opposte. [Risp. $k=0$]

Q3- Il rapporto tra le due radici sia $9/5$. [Risp. esistono due valori per k]

Soluzione

Q1- Per definizione un numero è radice di un'equazione se sostituito al posto dell'incognita verifica l'uguaglianza. Dovendo essere $x_1 = -3$ una radice dovrà essere soddisfatta l'uguaglianza seguente

$$9 - 12k - k + 3 = 0, \text{ dalla quale si ricava } k = \frac{12}{13}.$$

La corrispondente equazione di secondo grado è

$$13x^2 + 48x + 27 = 0,$$

che risolviamo.

Poiché il coefficiente del termine di primo grado è pari ($b=48$) applichiamo la formula ridotta.

$$\frac{\Delta}{4} = 14^2 - 13 \cdot 27 = 225 = 15^2; x_2^1 = \frac{-24 \pm \sqrt{15^2}}{13} = \frac{-24 \pm 15}{13}, \text{ da cui}$$

$$x_1 = \frac{-24-15}{13} = -\frac{39}{13} = -3 \text{ (è il valore di partenza)}$$

$$x_2 = \frac{-24+15}{13} = -\frac{9}{13}$$

Osservazione (applicazione delle relazioni tra coefficienti e radici di un'equazione di secondo grado)

Una volta ottenuta l'espressione dell'equazione di secondo grado corrispondente al valore del parametro k , considerato che è noto il valore di una radice, $x_1 = -3$, si può determinare il valore della seconda radice utilizzando una delle due relazioni notevoli (1) o (2) riportate sopra. Così, utilizzando la relazione sulla somma si ha

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{48}{13}, \text{ quindi } x_2 = S - x_1, \text{ e con } x_1 = -3 \text{ segue } x_2 = -\frac{48}{13} - (-3) = -\frac{9}{13}.$$

Evidentemente questo metodo è molto più veloce per la determinazione della seconda radice dell'equazione.

Q2- Se le radici dell'equazione sono tra loro reciproche allora il loro prodotto è uguale ad uno:

$$x_2 = \frac{1}{x_1} \rightarrow P = x_1 \cdot x_2 = 1.$$

Per risolvere il problema occorre imporre dunque che si abbia

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 1, \text{ cioè: } 3 - k = 1, \text{ da cui } k = 2.$$

L'equazione corrispondente è

$$x^2 + 8x + 1 = 0$$

Le cui radici sono

$$x_2^1 = -4 \pm \sqrt{15}, \quad x_1 = -4 - \sqrt{15} \text{ e } x_2 = -4 + \sqrt{15}.$$

Verifica della proprietà di reciprocità per le radici

$$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{-4 - \sqrt{15}} = -\frac{1}{4 + \sqrt{15}} = -\frac{(4 - \sqrt{15})}{(4 + \sqrt{15})(4 - \sqrt{15})} = -\frac{4 - \sqrt{15}}{4^2 - (\sqrt{15})^2} = -\frac{4 - \sqrt{15}}{16 - 15} = -4 + \sqrt{15} = x_2$$

La proprietà è soddisfatta.

Q3- Affermare che le radici dell'equazione siano opposte equivale a richiedere che la loro somma sia zero e dunque, per la relazione (1), dovrà essere nullo il coefficiente del termine di primo grado,

$b=0$, e diverso da zero il coefficiente del termine di secondo grado ($a \neq 0$). Notiamo che a non dipende dal parametro e vale 1.

$$x_1 = -x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow b = 4k = 0 \Leftrightarrow k = 0$$

L'equazione corrispondente è

$$x^2 + 3 = 0$$

che non ammette radici reali perché evidentemente in $\mathbb{R}$ l'uguaglianza $x^2 = -3$ non è soddisfatta da alcun numero.

Q4- Poniamo $\frac{x_2}{x_1} = \frac{9}{5}$, dunque $x_2 = \frac{9}{5}x_1$. Per trovare gli eventuali valori del parametro k per i quali si verifica la richiesta si deve risolvere il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x_2 = \frac{9}{5}x_1 \\ x_1 + x_2 = -4k \\ x_1 \cdot x_2 = -k + 3 \end{cases} \quad (*)$$

Strategia risolutiva

Tramite le prime due equazioni esprimiamo le due radici in funzione del parametro e sostituiamo le rispettive espressioni nella terza equazione ottenendo in tal modo un'equazione nell'incognita k che andrà risolta.

$$\begin{cases} x_2 = \frac{9}{5}x_1 \\ x_1 + x_2 = -4k \end{cases}, \text{ da cui } \begin{cases} x_2 = \frac{9}{5}x_1 \\ x_1 + \frac{9}{5}x_1 = -4k \end{cases}, \text{ quindi } \begin{cases} x_2 = \frac{9}{5}x_1 \\ x_1 = -\frac{10}{7}k \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x_2 = -\frac{18}{7}k \\ x_1 = -\frac{10}{7}k \end{cases}$$

La terza equazione del sistema (*) diventa

$$\left(-\frac{10}{7}k\right) \cdot \left(-\frac{18}{7}k\right) = -k + 3 \text{ che si riduce alla forma } 180k^2 + 49k - 147 = 0$$

Il discriminante è $\Delta = 49^2 + 4 \cdot 180 \cdot 147 = 329^2$ e quindi l'equazione ammette due radici reali distinte:

$$k_2^1 = \frac{-49 \pm 329}{2 \cdot 180}, \text{ quindi } k_1 = -\frac{21}{20} \text{ e } k_2 = \frac{7}{9}.$$

Dunque esistono due valori del parametro per i quali è soddisfatta la relazione richiesta tra le radici.

Con $k = -\frac{21}{20}$ l'equazione corrispondente è

$$x^2 - \frac{21}{20}x + \frac{81}{20} = 0,$$

le cui radici sono $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{27}{10}$.

Con $k = \frac{7}{9}$ l'equazione corrispondente è

$$9x^2 + 28x + 20 = 0,$$

le cui radici sono $x_1 = -\frac{10}{9}$ e $x_2 = -2$.