

Diseguazioni razionali con e senza moduli

1) $\frac{|x|-4}{|x|} < 2$

Soluzione

Osserviamo che la disequazione ha senso è ogni $x \neq 0$. Per detti valori la disequazione si elabora trasformandola in altre equivalenti, come di seguito indicato.

$$\frac{|x|-4}{|x|} < 2 \rightarrow |x|-4 < 2|x| \rightarrow |x| > -4$$

La disuguaglianza ottenuta è verificata per ogni numero reale e dunque, tenendo presente l'insieme di definizione della disequazione, si conclude che l'insieme delle soluzioni della stessa è $S = R_0 = R - \{0\}$.

2) $\frac{|x-1|-2}{1+|x|+|x-7|} < 0$

Soluzione

La disequazione è definita per ogni valore reale dell'incognita x in quanto il denominatore è sempre diverso da zero. Ciò premesso, osserviamo che il denominatore assume valore strettamente positivo in quanto è la somma di tre termini dei quali il primo è positivo e gli altri due sono non negativi. Pertanto il valore della frazione risulta negativo se e solo se è negativo il numeratore; in definitiva la disequazione è equivalente alla seguente:

$$|x-1|-2 < 0$$

che risolviamo velocemente come segue

$$|x-1|-2 < 0 \rightarrow |x-1| < 2 \rightarrow -2 < x-1 < 2 \rightarrow 1-2 < x < 2+1 \rightarrow -1 < x < 3$$

Concludiamo che l'insieme delle soluzioni della disequazione è l'intervallo $S =]-1; 3[$.

3) $\frac{|x^2-1|-1}{x^2+1} \geq 0$

Soluzione

La disequazione ha senso su tutto l'asse reale $\mathbb{R}$.

Considerato che il denominatore assume valori strettamente positivi, la disequazione è equivalente alla seguente

$$|x^2-1|-1 \geq 0$$

che possiamo risolvere agevolmente.

$$|x^2-1|-1 \geq 0 \rightarrow |x^2-1| \geq 1 \rightarrow (x^2-1 \leq -1) \vee (x^2-1 \geq 1)$$

La disequazione $x^2-1 \leq -1$, che si trasforma nella seguente $x^2 \leq 0$, ha come insieme delle soluzioni $S_1 = \{0\}$.

L'altra disequazione $x^2-1 \geq 1$, che diventa $x^2 \geq 2$, è soddisfatta nell'insieme

$$S_2 =]-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty[$$

Concludiamo che la disequazione in esame ha come insieme delle soluzioni $S = S_1 \cup S_2 =]-\infty; -\sqrt{2}] \cup \{0\} \cup [\sqrt{2}; +\infty[$

$$4) \frac{x+2}{|x|\sqrt{1-x}} \geq 0$$

Soluzione

La disequazione è definita sotto le condizioni $(x \neq 0) \wedge (1-x > 0)$; risolvendola, si trasforma nel seguente sistema

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ (x \neq 0) \wedge (1-x > 0) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ (x \neq 0) \wedge (x < 1) \end{cases} \text{ il cui insieme delle soluzioni è } S = [-2; 1[- \{0\}.$$

$$5) \frac{x^2-4}{x+1} < 0$$

Soluzione

La disequazione è definita nel dominio $D = \mathbb{R} - \{-1\}$.

Per trovare le soluzioni si studiano le disequazioni

$$a) x^2 - 4 > 0, \quad b) x + 1 > 0$$

La prima è soddisfatta nell'insieme $S_a =]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$; la seconda è soddisfatta

nell'intervallo $S_b =]-1; +\infty[$. Realizzando il grafico lineare comparativo delle soluzioni parziali ed eseguendo il prodotto dei segni dei due fattori si riconosce che il segno della frazione è positivo nell'insieme $S =]-\infty; -2[\cup]-1; 2[$.

$$6) \frac{1-x}{|x|-1} < 0$$

Soluzione

La disequazione è definita nel dominio $D = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$. Si riconosce che

$$1-x > 0 \quad \text{per } x < 1;$$

$$|x|-1 > 0 \quad \text{per } (x < -1) \vee (x > 1).$$

Dal confronto delle soluzioni delle due disequazioni emerge che il segno della frazione è negativo nell'insieme $S =]-1; 1[\cup]1; +\infty[$.

Disequazioni a risoluzione rapida

$$1) |x-1|x \leq 0 \quad \text{L'insieme delle soluzioni è } S = \{x \in \mathbb{R} : (x \leq 0) \vee (x = 1)\}$$

$$2) x^2 + |x| \leq 0 \quad \text{L'insieme delle soluzioni è } S = \{0\}$$

$$3) x^2 + |x-3| > 0$$

Si osservi che il primo membro è la somma di due termini non negativi che non si annullano contemporaneamente; si conclude che l'insieme delle soluzioni è $\mathbb{R}$.

$$4) x \left| x - \frac{1}{x} \right| < 0$$

Osservato che l'argomento del modulo si annulla per $x=-1$ e $x=1$ ed è positivo per ogni altro valore diverso da zero, si conclude immediatamente che la disequazione è soddisfatta nell'insieme $S =]-\infty; -1[\cup]-1; 0[$.

5) $\frac{x+|x|}{|x|+2} > 0$ L'insieme delle soluzioni è: $S =]0; +\infty[$