

Diseguazioni parametriche di secondo grado

Discutere le seguenti disequazioni al variare del parametro reale k.

1) $x^2 + (2-k)x - 2k \geq 0$ Resp. Con $k < -2$: $(x \leq k) \vee (x \geq -2)$; Con $k = -2$: $S = \mathbb{R}$;

Con $k > -2$: $(x \leq -2) \vee (x \geq k)$

2) $2x^2 + (k-2)x - k < 0$

3) $x^2 + x + k - k^2 > 0$

4) $k^2x^2 + k(k-2)x + 1 - k \leq 0$

5) $x^2 - 4x + 4 - 9k^2 \leq 0$ Resp. Con $k < 0$: $2 + 3k \leq x \leq 2 - 3k$; con $k = 0$, $S = \{0\}$;

con $k > 0$: $2 - 3k \leq x \leq 2 + 3k$

6) $k^2x^2 - k^2x - k - 1 > 0$ Resp. Se $(k < -2) \vee (k > 0)$, $\left(x < -\frac{1}{k}\right) \vee \left(x > \frac{k+1}{k}\right)$;

se $(-2 < k < 0)$, $\left(x < \frac{k+1}{k}\right) \vee \left(x > -\frac{1}{k}\right)$; se $k = -2$, $S = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

Soluzione

- 1)** Il discriminante del trinomio al primo membro è $\Delta = (k+2)^2$, quindi non negativo per ogni valore del parametro k; l'equazione associata ammette due radici reali, che risultano coincidenti per $k = -2$. Distinguiamo i due casi.

- Con $k = -2$ risulta $\Delta = 0$ e la disequazione è soddisfatta in tutto $\mathbb{R}$.

- Con $k \neq -2$ per le radici dell'equazione associata si ha: $x_2^1 = \frac{k-2 \pm \sqrt{(k+2)^2}}{2}$

$$= \frac{k-2 \pm |k+2|}{2}$$

Occorre distinguere i due casi:

- a) Per $k < -2$, $k+2 < 0$, quindi $|k+2| = -k-2$; le due radici sono

$$x_1 = \frac{k-2 - (-k-2)}{2} = k, \quad x_2 = \frac{k-2 + (-k-2)}{2} = -2 \quad \text{ed evidentemente risulta } x_1 < x_2. \text{ La}$$

disequazione è soddisfatta per valori esterni all'intervallo delle radici, comprese le radici stesse. L'insieme delle soluzioni è: $S =]-\infty; k] \cup [-2; +\infty[$.

b) Per $k > -2$, $k+2 > 0$, quindi $|k+2| = k+2$; le due radici sono

$$x_1 = \frac{k-2-(k+2)}{2} = -2, \quad x_2 = \frac{k-2+(k+2)}{2} = k, \text{ con } x_1 < x_2.$$

La disequazione è soddisfatta per valori esterni all'intervallo delle radici, compresi i valori delle radici. L'insieme delle soluzioni è: $S =]-\infty; -2] \cup [k; +\infty[$.

- 2)** Il discriminante del trinomio al primo membro è $\Delta = (k-2)^2 + 8k = (k+2)^2$, quindi non negativo per ogni valore del parametro k per cui l'equazione associata ammette due radici reali, che risultano coincidenti per $k = -2$. Distinguiamo i due casi.

Con $k = -2$ si ha $\Delta = 0$, il valore comune delle radici dell'equazione associata è $x = x_1 = x_2 = 1$; la disequazione diventa $2x^2 - 4x + 2 < 0$, quindi $2(x-1)^2 < 0$, e questa disuguaglianza non è soddisfatta da alcun valore reale. Concludiamo che nel caso considerato l'insieme delle soluzioni è vuoto: $S = \emptyset$.

Con $k \neq -2$ per le radici dell'equazione associata si ha: $x_2^1 = \frac{2-k \pm \sqrt{(k+2)^2}}{2} = \frac{2-k \pm |k+2|}{2}$

Occorre distinguere i due casi:

a) Per $k < -2$ si ha $k+2 < 0$, quindi $|k+2| = -k-2$; le due radici sono

$$x_1 = \frac{2-k-(-k-2)}{2} = 2, \quad x_2 = \frac{2-k+(-k-2)}{2} = -k \text{ ed evidentemente risulta } 2 < -k. \text{ La disequazione è soddisfatta per valori interni all'intervallo delle radici; l'insieme delle soluzioni è: } S = [2; -k[.$$

b) Per $k > -2$, $k+2 > 0$, quindi $|k+2| = k+2$; le due radici sono

$$x_1 = \frac{2-k-(k+2)}{2} = -k, \quad x_2 = \frac{2-k+(k+2)}{2} = 2, \text{ con } x_1 < x_2.$$

La disequazione è soddisfatta per valori interni all'intervallo delle radici; l'insieme delle soluzioni è: $S = [-k; 2[$.

- 3)** Il discriminante del trinomio al primo membro è $\Delta = 1 - 4k + 4k^2 = (2k-1)^2$, quindi non negativo per ogni valore del parametro k ; l'equazione associata ammette due radici reali, che risultano coincidenti per $k = 1/2$. Distinguiamo i due casi.

- Con $k=1/2$ risulta $\Delta=0$ e la disequazione è soddisfatta in tutto $\mathbb{R}$.
- Con $k \neq 1/2$ risolvendo l'equazione associata si ha: $x_2^1 = \frac{-1 \pm \sqrt{(2k-1)^2}}{2} = \frac{-1 \pm |2k-1|}{2}$

Occorre distinguere i due casi:

a) Per $k < 1/2$, $2k-1 < 0$, quindi $|2k-1| = -2k+1$; le due radici sono

$x_1 = \frac{-1 - (-2k+1)}{2} = k-1$, $x_2 = \frac{-1 + (-2k+1)}{2} = -k$ e risulta $x_1 < x_2$. La disequazione è soddisfatta per valori esterni all'intervallo delle radici; l'insieme delle soluzioni è: $S =]-\infty; k-1[\cup]-k; +\infty[$.

b) Per $k > 1/2$, $2k-1 > 0$, quindi $|2k-1| = 2k-1$; le due radici sono

$$x_1 = \frac{-1 - (2k-1)}{2} = -k, \quad x_2 = \frac{-1 + (2k-1)}{2} = k-1, \text{ con } x_1 < x_2.$$

La disequazione è soddisfatta per valori esterni all'intervallo delle radici; l'insieme delle soluzioni è: $S =]-\infty; -k[\cup]k-1; +\infty[$.

- 4) Osserviamo subito che per $k=0$ si annullano i coefficienti di primo e secondo grado, l'equazione in esame si riduce alla disuguaglianza $1 \leq 0$, che evidentemente è falsa, dunque per detto valore di k la disequazione non ha soluzioni.

Studiamo dunque la disequazione per $k \neq 0$, per i quali valori la stessa è di secondo grado ed il discriminante è $\Delta = k^2(k-2)^2 - 4k^2(1-k) = k^4 > 0$; l'equazione associata ammette due radici reali e distinte che sono:

$$x_2^1 = \frac{-k(k-2) \pm \sqrt{k^4}}{2k^2} = \frac{-k(k-2) \pm k^2}{2k^2} = \frac{-(k-2) \pm k}{2k},$$

da cui

$$x_1 = \frac{-(k-2)-k}{2k} = \frac{2(1-k)}{2k} = \frac{1-k}{k}; \quad x_2 = \frac{-(k-2)+k}{2k} = \frac{1}{k}$$

Notiamo che possiamo scrivere

$$x_1 = \frac{1-k}{k} = \frac{1}{k} - 1 = x_2 - 1 < x_2, \text{ per ogni } k \neq 0.$$

La disequazione in esame è soddisfatta dai valori interni all'intervallo delle radici dell'equazione associata, compresi i valori stessi delle radici. L'insieme delle soluzioni è dunque:

$$S = \left[\frac{1-k}{k}; \frac{1}{k} \right]$$