

Algebra per il primo Liceo Scientifico

(Risoluzione dei due problemi assegnati in una prova di verifica¹)

E1) Determinare per quale valore del parametro m la seguente divisione è esatta. Per il valore trovato calcolare il relativo quoziente

$$(4x^3 - 7mx + m - 3) : (2x - 1)$$

E2) Determinare il polinomio $A(x)$ che diviso per il polinomio $B(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$ dà come quoziente il polinomio $Q(x) = \frac{1}{2}x + 1$ e come resto $R = \frac{1}{2}$.

E3) Semplificare le seguenti espressioni algebriche.

$$3.1) \quad \frac{ax + 3x - a - 3}{ax - 3x - a + 3} \qquad 3.2) \quad \frac{a^4 - 1}{a^3 - a^2 + a - 1} \qquad 3.3) \quad \frac{x^2 + x - 6}{4x - x^2 - 4}$$

$$3.4) \quad \frac{16a^3 - 2}{4a^2 - 1} : \left(2a + \frac{1}{2a + 1} \right)$$

E4) Calcolare il valore dell'espressione numerica $0,0125 \cdot 10^{28} \cdot 8 \cdot 100^{-12} : (0,01^{-4})^{-2}$

E5) Risolvere le seguenti equazioni nell'incognita x .

$$5.1) \quad \frac{2a - x}{x + 1} + \frac{a - 1}{2x + 2} = 3 \qquad 5.2) \quad \frac{1}{x - 1} + \frac{k}{x + 1} = \frac{3}{x^2 - 1}$$

Soluzione

E1)

La divisione è esatta se il resto è nullo. Per rispondere alla prima parte del quesito si deve calcolare il resto ed imporre che sia nullo. Il valore del resto R può essere determinato utilizzando il teorema del resto secondo il quale si ha:

$$R = P\left(\frac{1}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 7m\left(\frac{1}{2}\right) + m - 3 = \frac{1}{2} - \frac{7}{2}m + m - 3 = -\frac{5}{2}m - \frac{5}{2}$$

Ponendo $R=0$ si ha l'equazione

$$-\frac{5}{2}m - \frac{5}{2} = 0 \rightarrow m = -1$$

La divisione in esame diventa $(4x^3 + 7x - 4) : (2x - 1)$

Eseguita la divisione si trova come quoziente $Q(x) = 2x^2 + x + 4$.

E2)

Il polinomio richiesto è il seguente

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R = \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\left(\frac{1}{2}x + 1\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}x^3 - x + \frac{1}{2}$$

E3)

$$3.1) \quad \frac{ax + 3x - a - 3}{ax - 3x - a + 3} = \frac{a(x-1) + 3(x-1)}{a(x-1) - 3(x-1)} = \frac{(x-1)(a+3)}{(x-1)(a-3)} = \frac{a+3}{a-3}$$

L'uguaglianza sussiste con la condizione di equivalenza (C.Eq.) $x \neq 1$.

¹ I testi degli esercizi risolti sono stati assegnati il 28-08-2008 nella prova di matematica per l'accertamento del recupero dei debiti formativi attribuiti agli alunni della classe 1D, Ind. PNI, del Liceo Scientifico G. Stampacchia-Tricase, nel mese di giugno 2008.

$$3.2) \quad \frac{a^4 - 1}{a^3 - a^2 + a - 1} = \frac{(a^2 + 1)(a^2 - 1)}{a^2(a - 1) + (a - 1)} = \frac{(a^2 + 1)(a + 1)(a - 1)}{(a^2 + 1)(a - 1)} = a + 1, \text{ con la C.Eq. } a \neq 1$$

$$3.3) \quad \frac{x^2 + x - 6}{4x - x^2 - 4} = \frac{(x - 2)(x + 3)}{-(x - 2)^2} = \frac{x + 3}{2 - x}$$

$$3.4) \quad \frac{16a^3 - 2}{4a^2 - 1} : \left(2a + \frac{1}{2a + 1} \right) = \frac{2(8a^3 - 1)}{(2a + 1)(2a - 1)} : \frac{4a^2 + 2a + 1}{2a + 1} = \frac{2(2a - 1)(4a^2 + 2a + 1)}{(2a + 1)(2a - 1)} \cdot \frac{(2a + 1)}{(4a^2 + 2a + 1)} = 2, \text{ con la C.Eq. } \left(a \neq \frac{1}{2} \right) \wedge \left(a \neq -\frac{1}{2} \right).$$

E4)

$$0,0125 \cdot 10^{28} \cdot 8 \cdot 100^{-12} : (0,01^{-4})^{-2} = 125 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{28} \cdot 8 \cdot (10^2)^{-12} : (10^{-2})^8 = 10^3 \cdot 10^{24} \cdot 10^{-24} : 10^{-16} = 10^{19}$$

$$5.1) \quad \frac{2a - x}{x + 1} + \frac{a - 1}{2x + 2} = 3 \rightarrow \frac{2 \cdot (2a - x) + a - 1 - 3 \cdot 2(x + 1)}{2(x + 1)} = 0 \rightarrow 8x = 5a - 7, \text{ con } x \neq -1.$$

Il valore di x è: $x = \frac{5a - 7}{8}$

Occorre stabilire se il valore trovato è accettabile al variare del parametro a . Risolviamo l'equazione

$$\frac{5a - 7}{8} = -1 \rightarrow 5a = -1 \rightarrow a = -\frac{1}{5}$$

Conclusione:

Con $a \neq -\frac{1}{5}$ l'equazione è determinata e la soluzione è $x = \frac{5a - 7}{8}$;

con $a = -\frac{1}{5}$ il valore trovato per x non è accettabile e l'equazione non ha soluzioni.

$$5.2) \quad \frac{1}{x - 1} + \frac{k}{x + 1} = \frac{3}{x^2 - 1} \quad \text{L'equazione ha senso sotto la condizione } (x - 1 \neq 0) \wedge (x + 1 \neq 0), \text{ quindi con } x \neq 1 \text{ ed } x \neq -1.$$

Con le condizioni suddette l'equazione ridotta alla forma normale è

$$(1 - k)x = 2 - k$$

Quest'equazione :

per $k = 1$ non ha soluzione;

per $k \neq 1$ ammette come soluzione $x = \frac{k - 2}{k - 1}$ che occorre stabilire se è accettabile.

Poiché non si deve verificare che per particolari valori del parametro k il valore trovato per x coincida con uno dei valori 1 e -1 si studiano le uguaglianze

$$\frac{k - 2}{k - 1} = 1, \quad \frac{k - 2}{k - 1} = -1.$$

Si riconosce che la prima non si verifica per alcun valore di k ; la seconda, invece, si verifica per $k = \frac{3}{2}$.

Conclusione:

con $k = \frac{3}{2}$ l'equazione è impossibile, perché non ha soluzioni;

con $k \neq \frac{3}{2}$ l'equazione è determinata e la sua soluzione è $x = \frac{k-2}{k-1}$.