Insiemi e logica nell'insieme dei numeri naturali

Problema- Stabilire quanti sono i numeri naturali compresi tra 1 e 6000 che non sono divisibili per 2, né per 3, né per 5.

Risoluzione

1) Indichiamo con M_2 l'insieme dei numeri naturali compresi tra 1 e 6000 divisibili per 2 , quindi quelli pari. M_2 è composto da 3000 elementi: 2,4,6,...,100,102,...,5996,5998,6000. Possiamo descrivere l'insieme nella forma $M_2 = \{n \in N | n = 2k, k \in N \wedge (1 \le k \le 3000)\}$.
2) Sia M_3 l'insieme dei numeri naturali compresi tra 1 e 6000 divisibili per 3. M_3 è composto da 2000 elementi: 3,6,9,...,99,102,...,5997, 6000. Possiamo descrivere l'insieme nella forma $M_3 = \{n \in N | n = 3k, k \in N \wedge (1 \le k \le 2000)\}$.
3) Sia M_5 l'insieme dei numeri naturali compresi tra 1 e 6000 divisibili per 5. M_5 è composto da 1200 elementi: 5,10,15,...,95,100,...,5995, 6000. E' l'insieme $M_5 = \{n \in N | n = 5k, k \in N \wedge (1 \le k \le 1200)\}$.
4) Per conseguire l'obiettivo dall'insieme $S = \{n \in N | 1 \le n \le 6000\}$ devono essere eliminati i multipli di 2, quelli di 3 e quelli di 5. Osserviamo ora che la somma degli elementi costituenti M_2, M_3, M_5 è 3000+2000+1200=6200 >6000; evidentemente i tre sottoinsiemi M_2, M_3, M_5 di S non sono a due a due disgiunti; in particolare l'insieme intersezione $M_2 \cap M_3 \cap M_5$ contiene gli elementi di S che sono multipli di $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ che sono in numero di 6000:30=200.
5) L'insieme $M_2 \cap M_3$ è formato dai multipli di 6 compresi in S e questi sono in numero di 6000:6=1000, dei quali 1000-200=800 non sono multipli di 5. Così, l'insieme $M_2 \cap M_5$ è formato dagli di elementi di S che sono multipli di 10, che sono in numero di 600, dei quali 200 sono anche multipli di 3, quindi 400 sono quelli che non sono multipli di 3. Ancora l'insieme $M_3 \cap M_5$ è formato dai multipli di 15, che sono in numero di 6000:15=400, dei quali 200 non sono multipli di 2.
6) Tutto ciò premesso possiamo affermare che:
   a. i multipli di 2 che non sono multipli né di 3 , né di 5 sono :3000 - (800+200+400)=1600. Questo valore rappresenta la cardinalità dell'insieme M_2-($M_3 \cup M_5$).
   b. I multipli di 3 che non sono multipli di 2, né di 5 sono in numero di: 2000 - (800+200+200) = 800. Questo valore è la cardinalità dell'insieme M_3-($M_2 \cup M_5$).
   c. I multipli di 5 che non sono multipli di 2 , né di 3, sono in numero di: 1200-(400+200+200) = 400. Questo valore è la cardinalità dell'insieme M_5-($M_2 \cup M_3$).

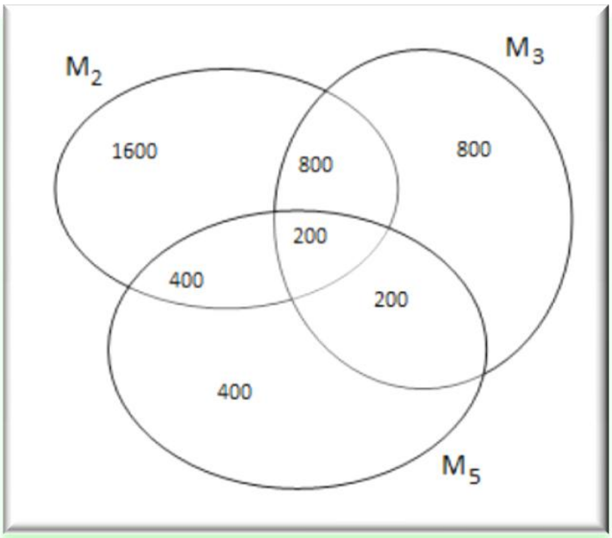

Figura 1- Distribuzione dei numeri compresi tra 1 e 6000 multipli di almeno uno dei numeri 2, 3, 5.

La distribuzione degli elementi dell'insieme $M_2 \cup M_3 \cup M_5$ è quella riportata in **Figura1** e la totalità degli elementi è:

(1600+800+200+400) +(800+200)+400=4400

Osserviamo che $M_2 \cup M_3 \cup M_5$ è l'insieme formato dai numeri naturali compresi tra 1 e 6000 i quali hanno la proprietà di essere multipli di almeno uno dei numeri 2, 3, 5 e quindi sono quelli che vanno eliminati dal gruppo dei 6000 numeri naturali compresi tra 1 e 6000.

Concludiamo che **l'insieme dei numeri naturali compresi tra 1 e 6000 che non sono divisibili per alcuno dei numeri 2, 3, 5 contiene esattamente 6000-4400=1600 numeri**.