

Esercitazione sulle equazioni di secondo grado

- Applicazione delle relazioni tra coefficienti e radici di un'equazione di secondo grado.
- Semplificazione di frazioni algebriche contenenti polinomi di grado maggiore o uguale a due.

Premesse

- 1) Ricordiamo che le radici x_1, x_2 , dell'equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

verificano le seguenti relazioni

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

- 2) Il trinomio di secondo grado $ax^2 + bx + c$ si può scomporre in fattori come segue

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

dove x_1, x_2 sono le radici dell'equazione associata $ax^2 + bx + c = 0$.

*** **

Prima parte

Nelle equazioni di secondo grado che seguono nota una radice determinare l'altra senza risolvere l'equazione.

- 1) $2x^2 + x - 21 = 0$, $x_1 = 3$ Si può calcolare la seconda radice utilizzando l'espressione della somma delle due radici.

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{1}{2}, \quad \text{da cui } x_2 = S - x_1 = -\frac{1}{2} - 3 = -\frac{7}{2}$$

- 2) $x^2 - 5x + 6 = 0$, $x_1 = 2$

Determiniamo il valore della seconda radice utilizzando il valore del prodotto delle due radici.

$$P = \frac{c}{a} = 6 \rightarrow x_2 = \frac{P}{x_1} = \frac{6}{2} = 3$$

- 3) $2x^2 + 7x - 9 = 0$, con $x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{P}{x_1} = \frac{c}{a \cdot x_1} = -\frac{9}{2}$

- 4) $2x^2 - x - 28 = 0$, con $x_1 = 4 \Rightarrow P = \frac{c}{a} = -\frac{28}{2} = -14$, da cui $x_2 = \frac{-14}{4} = -\frac{7}{2}$

- 5) $x^2 - 10x + 9 = 0$, con $x_1 = 9 \Rightarrow x_2 = S - x_1 = -\frac{b}{a} - x_1 = 10 - 9 = 1$

Esercizi proposti

- | | | |
|------------------------------------|----------------------|-----------|
| 1) $5x^2 + x - 6 = 0;$ | $x_1 = 1;$ | $x_2 = ?$ |
| 2) $x^2 - 7x + 10 = 0;$ | $x_1 = 2;$ | $x_2 = ?$ |
| 3) $x^2 + x - 12 = 0;$ | $x_1 = 3;$ | $x_2 = ?$ |
| 4) $(2x-1)^2 - 4(2x-1) = 0;$ | $x_1 = \frac{1}{2};$ | $x_2 = ?$ |
| 5) $(3+x)^2 - 7(x+3) = 0;$ | $x_1 = -3;$ | $x_2 = ?$ |
| 6) $2(x-1)^2 - 7(x+1) - 8 = 0;$ | $x_1 = -1;$ | $x_2 = ?$ |
| 7) $3(2x-3)^2 - 4(x-2) - 3 = 0;$ | $x_1 = 2;$ | $x_2 = ?$ |
| 8) $5(1-3x)^2 + 13(x+1) - 80 = 0;$ | $x_1 = -1;$ | $x_2 = ?$ |
| 9) $2x(x-7) - (x+2)(x-4) + 24 = 0$ | $x_1 = 4;$ | $x_2 = ?$ |
| 10) $(3x-2)^2 - 3(x-3) - 49 = 0;$ | $x_1 = 3;$ | $x_2 = ?$ |

*** **

Seconda parte

Semplificazione di frazioni algebriche

$$1) \frac{2x^2 + x - 21}{(x-3)(x+7)}$$

Osserviamo che l'equazione $2x^2 + x - 21 = 0$ ammette come radici $x_1 = 3; x_2 = -\frac{7}{2}$ per cui sussiste la seguente scomposizione in fattori del trinomio al numeratore della frazione

$2x^2 + x - 21 = 2(x-3)\left(x + \frac{7}{2}\right) = (x-3)(2x+7)$. La frazione può essere trasformata e semplificata come segue

$$\frac{2x^2 + x - 21}{(x-3)(x+7)} = \frac{(x-3)(2x+7)}{(x-3)(x+7)} = \frac{2x+7}{x+7}. \text{ L'uguaglianza sussiste per ogni } x \neq 3.$$

$$2) \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 5x + 2}$$

Scomposizione del trinomio al numeratore: $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$.

Per il denominatore osserviamo che le radici dell'equazione

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \quad \text{sono } x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = 2, \text{ dunque risulta}$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 2(x-2)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x-2)(2x-1).$$

Semplifichiamo la frazione

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 5x + 2} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(2x-1)} = \frac{x-3}{2x-1}.$$

L'uguaglianza sussiste per ogni $x \neq 2$.

$$3) \frac{x^2 - 2}{x^2 + (\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2}}$$

Per il numeratore sussiste la seguente scomposizione in fattori $x^2 - 2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$.

Per il denominatore troviamo le radici dell'equazione associata.

$$x^2 + (\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2} = 0 \rightarrow x = \frac{1 - \sqrt{2} \pm \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2 + 4\sqrt{2}}}{2} = \frac{1 - \sqrt{2} \pm \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2}}{2} =$$

$$\frac{1 - \sqrt{2} \pm (\sqrt{2} + 1)}{2} \rightarrow x_1 = -\sqrt{2}; x_2 = 1.$$

Semplificazione della frazione.

$$\frac{x^2 - 2}{(x + \sqrt{2})(x - 1)} = \frac{(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})}{(x + \sqrt{2})(x - 1)} = \frac{x - \sqrt{2}}{x - 1}$$

L'uguaglianza sussiste $\forall x \neq -\sqrt{2}$.

Esercizi proposti

Semplificare le seguenti frazioni

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{3x^2 - x - 2}{3x^2 - 5x + 2} & \text{b)} \frac{3x^2 + 5x - 2}{3x^2 + 7x + 2} & \text{c)} \frac{2x^2 + 5x - 25}{2x^2 - 7x + 5} \\ \text{d)} \frac{16x^3 - 16x^2 - 5x}{4x^2 + x - 5} & \text{e)} \frac{16x^2 - 9}{8x^3 + 2x^2 - 3x} & \end{array}$$

Risposte

$$\begin{array}{lllll} \text{a)} \frac{3x+2}{3x-2} & \text{b)} \frac{3x-1}{3x+1} & \text{c)} \frac{x+5}{x-1} & \text{d)} \frac{x(4x-1)}{x-1} & \text{e)} \frac{4x-3}{x(2x-1)} \end{array}$$