

Equazioni Biquadratiche, Binomie, Trinomie nel Campo Complesso

1) Scrivere un'equazione biquadratica avente tra le sue radici i valori:

$$x_1 = 3, x_2 = -\frac{1}{2}$$

2) Risolvere le seguenti equazioni

$$2.1) \quad 4x^4 + (4 - a^2)x^2 - a^2 = 0 \quad 2.2) \quad x^2(x+1)^2 - 10(x^2 + x) - 24 = 0$$

$$2.3) \quad 8x^5 - x^2 = 0 \quad 2.4) \quad x^4 + 25 = 0$$

Soluzione

1) Un'equazione biquadratica è di quarto grado e ridotta alla forma normale ha la seguente forma:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0;$$

essa ammette le radici a due a due opposte, quindi se $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{1}{2}$ sono due radici, lo saranno anche i valori $x_3 = -3$, $x_4 = \frac{1}{2}$. Un'equazione che verifica la richiesta è la seguente

$$(x-3)(x+3)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right) = 0 \text{ da cui } 4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$$

2.1) L'equazione in esame è biquadratica. Ponendo

$$x^2 = y \text{ si ha } x^4 = (x^2)^2 = y^2$$

e dunque si passa all'equazione ausiliaria di secondo grado

$$4y^2 + (4 - a^2)y - a^2 = 0 \text{ le cui radici sono } y_1 = \frac{a^2}{4}, y_2 = -1. \text{ Procediamo.}$$

$$\text{Con } y_1 = \frac{a^2}{4} \text{ segue } x^2 = \frac{a^2}{4}, \text{ che ammette come radici } x_1 = \frac{a}{2}, x_2 = -\frac{a}{2};$$

$$\text{con } y_2 = -1 \text{ segue } x^2 = -1, \text{ le cui radici sono complesse: } x_3 = i, x_4 = -i.$$

2.2) L'equazione è trinomia. Infatti si può scrivere nella seguente forma

$$[x(x+1)]^2 - 10x(x+1) - 24 = 0$$

Ponendo $x(x+1) = y$ si risolve l'equazione ausiliaria di secondo grado

$$y^2 - 10y - 24 = 0, \text{ le cui radici sono } y = 5 \pm \sqrt{25 + 24} = 5 \pm 7 \rightarrow y_1 = -2; y_2 = 12.$$

Si hanno i due seguenti casi:

$$\text{a) } y_1 = -2 \rightarrow x(x+1) = -2, \text{ quindi } x^2 + x + 2 = 0, \text{ le cui radici sono}$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}, \quad x_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2};$$

b) $y_2 = 12 \rightarrow x(x+1) = 12 \rightarrow x^2 + x - 12 = 0$, le cui radici sono $x_3 = -4$, $x_4 = 3$.

2.3) $8x^5 - x^2 = 0$ equivalente alla seguente $x^2(8x^3 - 1) = 0$

Applicando la legge di annullamento del prodotto si ricava

$x^2 = 0$, che ammette la soluzione doppia $x = 0$, oppure

$(8x^3 - 1) = 0$, che diventa

$$(2x-1)(4x^2+2x+1)=0, \text{ le cui radici sono } x_3 = \frac{1}{2}, \quad x_4 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_5 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2.3) $x^4 + 25 = 0$, che trasformiamo come segue

$$x^4 + 2 \cdot 5x^2 + 25 - 2 \cdot 5x^2 = 0 \rightarrow (x^2 + 5)^2 - (\sqrt{10}x)^2 = 0 \rightarrow$$

$$(x^2 + \sqrt{10}x + 5)(x^2 - \sqrt{10}x + 5) = 0.$$

Applicando la legge di annullamento del prodotto otteniamo

$$x^2 + \sqrt{10}x + 5 = 0, \text{ le cui radici sono: } x_1 = -\frac{\sqrt{10}}{2} - i\frac{\sqrt{10}}{2}, \quad x_2 = -\frac{\sqrt{10}}{2} + i\frac{\sqrt{10}}{2};$$

$$x^2 - \sqrt{10}x + 5 = 0, \text{ che ammette come radici: } x_3 = \frac{\sqrt{10}}{2} - i\frac{\sqrt{10}}{2}, \quad x_4 = \frac{\sqrt{10}}{2} + i\frac{\sqrt{10}}{2}.$$