

Per la classe seconda del Liceo Scientifico

Calcolo di determinanti del terzo ordine con la regola di Sarrus
 Sistemi di equazioni di primo grado di tre equazioni in tre incognite
 Sistema di equazioni di grado superiore al primo.

Es_1) Nel seguente determinante del terzo ordine

$$\begin{vmatrix} a & 2a+c & 3c \\ a-1 & 3 & a-2b \\ a-b & b+c & -a \end{vmatrix}$$

dopo aver stabilito per quali valori dei parametrici a, b, c si verificano le seguenti uguaglianze

$$a_{12} = a_{21}; \quad a_{13} = a_{31}; \quad a_{23} = a_{32},$$

calcolare il valore del determinante corrispondente.

Es_2) Risolvere i seguenti sistemi di equazioni

$$2.1) \begin{cases} \frac{x-y}{-1} - \frac{2x-z}{0,1} = 0 \\ 0,2x - 0,5y + 0,1z = -0,3 \\ 4y - z = 4x - 6 \end{cases} \quad 2.2) \begin{cases} x^2 - 5xy = 0 \\ x^2 - (y-3)^2 = 0 \end{cases}$$

[Soluzione Es_1](#)
[Soluzione Es_2.1](#)
[Soluzione Es_2.2](#)
[Regola di Sarrus](#)

Soluzione

Es_1)

Ricordiamo che in un determinante ogni elemento è individuato dagli indici di riga e di colonna . L'elemento che si trova nell'intersezione della **riga i-esima** con la **colonna j-esima** è indicato con il simbolo a_{ij} . Per un determinante del terzo ordine la struttura algebrica è pertanto la seguente

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (1.1)$$

Ciò premesso, poiché nel determinante assegnato

$$\begin{vmatrix} a & 2a+c & 3c \\ a-1 & 3 & a-2b \\ a-b & b+c & -a \end{vmatrix} \quad (1.2)$$

devono essere soddisfatte le uguaglianze

$$a_{12} = a_{21}, \quad a_{13} = a_{31}, \quad a_{23} = a_{32},$$

i valori dei parametri a, b, c dovranno essere soluzioni del seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} 2a+c=a-1 \\ 3c=a-b \\ a-2b=b+c \end{cases} \quad \text{che ridotto alla forma normale diventa:} \quad \begin{cases} a+c=-1 \\ a-b-3c=0 \\ a-3b-c=0 \end{cases}$$

Il sistema ottenuto si può risolvere facilmente con il metodo di sostituzione.

$$\begin{cases} c = -a - 1 \\ a - b - 3(-a - 1) = 0 \\ a - 3b - (-a - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -a - 1 \\ 4a - b = -3 \\ 2a - 3b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -a - 1 \\ b = 4a + 3 \\ 2a - 3(4a + 3) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -a - 1 \\ b = 4a + 3 \\ -10a = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{4}{5} \\ b = -\frac{1}{5} \\ c = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

Sostituendo i valori ottenuti per i parametri nel determinante (1.2), dopo aver eseguito le operazioni algebriche presenti, si perviene al seguente determinante

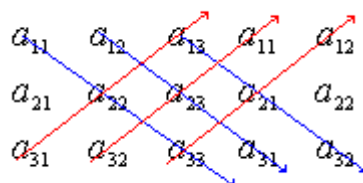
$$\begin{vmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{9}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{9}{5} & 3 & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{vmatrix} \quad (1.3)$$

Calcolo del determinante

Il valore di un determinante D del terzo ordine è

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

Detto valore si può agevolmente ottenere ricorrendo alla regola di Sarrus che sfrutta la seguente tabella



I primi tre prodotti sono ottenuti moltiplicando gli elementi che si trovano sulle diagonali discendenti (colorate in blu), mentre i tre prodotti del secondo gruppo si ottengono dagli elementi che si trovano sulle diagonali ascendenti (colorate in rosso).

Per il determinante in questione si ha:

$$\begin{vmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{9}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{9}{5} & 3 & -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{vmatrix} = \left(-\frac{48}{25} - \frac{54}{125} - \frac{54}{125} \right) - \left(\frac{27}{25} - \frac{16}{125} + \frac{324}{125} \right) = -\frac{791}{125}$$

Es_2)

2.1) Il sistema si riduce alla seguente forma normale

$$\begin{cases} -21x + y + 10z = 0 \\ 2x - 5y + z = -3 \\ 4x - 4y + z = 6 \end{cases}$$

Se per la risoluzione si applica il metodo di Cramer il **determinante del sistema** è

$$D = \begin{vmatrix} -21 & 1 & 10 \\ 2 & -5 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 143. \text{ Poiché } D \neq 0 \text{ il sistema è determinato, ammette cioè una sola soluzione.}$$

I valori degli altri tre determinati sono:

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 10 \\ -3 & -5 & 1 \\ 6 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 429; \quad D_y = \begin{vmatrix} -21 & 0 & 10 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 429; \quad D_z = \begin{vmatrix} -21 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & -3 \\ 4 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 858$$

e dunque i valori delle incognite sono

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{429}{143} = 3; \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{429}{143} = 3; \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{858}{143} = 6$$

2.2) Il sistema in esame è composto da due equazioni di secondo grado e quindi il suo grado è quattro. La risoluzione è abbastanza agevole: è sufficiente scomporre in fattori i primi membri delle due equazioni ed applicare la legge di annullamento del prodotto. Il sistema si trasforma nell'unione logica di quattro sistemi di primo grado. Si ha:

$$\begin{cases} x^2 - 5xy = 0 \\ x^2 - (y-3)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-5y) = 0 \\ (x+y-3)(x-y+3) = 0 \end{cases}$$

Il sistema equivale all'unione dei seguenti quattro sistemi:

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{cases} x=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} x=0 \\ x-y+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases} & \text{La soluzione } (x=0; y=3) \text{ è doppia.} \\ \text{c) } \begin{cases} x-5y=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}; & \text{d) } \begin{cases} x-5y=0 \\ x-y+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{15}{4} \\ y=-\frac{3}{4} \end{cases} \end{aligned}$$