

Esercitazione sulle divisioni tra polinomi

Esegui le seguenti divisioni ed effettuare la relativa verifica.

- | | | |
|---|---|--------------------|
| 1) $(3x^2 - 4x - 7):(x+1),$ | $Q(x) = 3x - 7,$ | $R = 0$ |
| 2) $(2x^2 + 5x - 7):(-x+1),$ | $Q(x) = -2x - 7,$ | $R = 0$ |
| 3) $(x^3 + 3x^2 - 54):(-x+3),$ | $Q(x) = -x^2 - 6x - 18,$ | $R = 0$ |
| 4) $(4x^3 - 5x + 8):(x+2),$ | $Q(x) = 4x^2 - 8x + 11,$ | $R = -14$ |
| 5) $(4x^2 - 8x + 5):(2x-1),$ | $Q(x) = 2x - 3,$ | $R = 2$ |
| 6) $(2x^3 - 3x + 6):(-2x+1),$ | $Q(x) = -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{4},$ | $R = \frac{19}{4}$ |
| 7) $(x^4 + 3x^2 - x - 4):(x^2 - 2x),$ | $Q(x) = x^2 + 2x + 7,$ | $R(x) = 13x - 4$ |
| 8) $(x^4 - 2x^3 + 7x - 8):(-x^2 + x - 2),$ | $Q(x) = -x^2 + x + 3,$ | $R(x) = 6x - 2$ |
| 9) $(-6x^4 + x^3 + 2x^2 - 5):(x^2 + 2x - 1),$ | $Q(x) = -6x^2 + 13x - 30,$ | $R(x) = 73x - 35$ |
| 10) $(-3x^4 + 13x^3 - 12x^2 + 6):(3x^2 - 4x - 6),$ | $Q(x) = -x^2 + 3x - 2,$ | $R(x) = 10x - 6$ |
| 11) $\left(x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 6x - \frac{9}{2}\right):(2x-3),$ | $Q(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2},$ | $R = 0$ |
| 12) $\left(-5x^2 + \frac{17}{4}x - \frac{1}{4}\right):\left(2x - \frac{3}{2}\right),$ | $Q(x) = -\frac{5}{2}x + \frac{1}{4},$ | $R = \frac{1}{8}$ |
| 13) $(x^4 - 2x^2 + 1):(x^2 - 1),$ | $Q(x) = x^2 - 1,$ | $R = 0$ |
| 14) $(x^6 - 3x^4 + 2x^2 - 4):(x^2 + 2),$ | $Q(x) = x^4 - 5x^2 + 12,$ | $R = -28$ |
| 15) $(x^{10} - x^8 + x^4 + 4x^2 - 22):(x^4 - x^2 - 6),$ | $Q(x) = x^6 + 6x^2 + 7,$ | $R = 47x^2 + 20$ |
| 16) $(x^2 - 2mx - 2m^2):(x - 2m),$ | $Q(x) = x + m,$ | $R = 0$ |
| 17) $(8x^2 + 5x + 3m):(x+1),$ | $Q(x) = 8x - 3,$ | $R(x) = 3m + 3$ |
| 18) $(x^2 + mx - 2m^2):(x+2m),$ | $Q(x) = x - m,$ | $R = 0$ |
| 19) $(-3x^2 + mx - 4m + 8):(x-2),$ | $Q(x) = -3x + m - 6,$ | $R = -2m - 4$ |
| 20) $(x^2 + 2(1-2m)x - 8m):(x+2),$ | $Q(x) = x - 4m,$ | $R = 0$ |

Segue lo svolgimento degli esercizi n.1, 3, 6, 9, 15.

Es1)

Con $A(x) = 3x^2 - 4x - 7$ e $B(x) = x + 1$, la divisione $A(x) : B(x)$ risulta esatta, cioè ha resto nullo: $R = 0$. Il quoziente è $Q(x) = 3x - 7$; i passaggi sono riportati nell'illustrazione di Figura 1.

Verifica

Si tratta di provare che sussiste l'uguaglianza

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x).$$

$$\text{Infatti: } (x+1) \cdot (3x-7) = 3x^2 - 7x + 3x - 7 = 3x^2 - 4x - 7$$

Es1

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 - 4x - 7 & x+1 \\ -3x^2 - 3x & 3x-7 \\ \hline = -7x-7 & \\ 7x+7 & \\ \hline = & \end{array}$$

Figura 1

Es2)

Con $A(x) = 2x^2 + 5x - 7$ e $B(x) = -x + 1$, la divisione è esatta con quoziente $Q(x) = -2x - 7$. Le elaborazioni necessarie per l'esecuzione della divisione e della successiva verifica sono identiche a quelle dell'esercizio precedente e vengono lasciate come esercizio per il lettore.

Es3)

Con $A(x) = x^3 + 3x^2 - 54$ e $B(x) = -x + 3$ la divisione risulta esatta con quoziente $Q(x) = -x^2 - 6x - 18$.

Riportiamo in Figura 2 le operazioni per la divisione facendo notare che nel polinomio dividendo manca il termine di primo grado e che nell'ipostazione dello schema per la divisione occorre prevedere la relativa colonna per allocarvi i termini corrispondenti; ciò si fa riportando il monomio nullo $0x$.

Verifica

$$(-x+3)(-x^2-6x-18) =$$

$$x^3 + 6x^2 + \cancel{18x} - 3x^2 - \cancel{18x} - 54 = x^3 + 3x^2 - 54$$

Es3

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 3x^2 + 0x - 54 & -x+3 \\ -x^3 + 3x^2 & -x^2-6x-18 \\ \hline = 6x^2 + 0x & \\ -6x^2 + 18x & \\ \hline = 18x - 54 & \\ -18x + 54 & \\ \hline = & \end{array}$$

Figura 2

Es6)

Con $A(x) = 2x^3 - 3x + 6$ e $B(x) = -2x + 1$ la divisione non è esatta perché presenta un resto diverso da zero.

Nell'esecuzione della divisione occorre prestare attenzione alla somma algebrica dei coefficienti di alcuni monomi simili nei quali compaiono delle frazioni. (Figura 3).

Verifica

$$(-2x+1)\left(-x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}\right) + \frac{19}{4} = 2x^3 - 3x + 6$$

$$-x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{4} + \frac{19}{4} = 2x^3 - 3x + 6$$

Es6

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 0x^2 - 3x + 6 & -2x+1 \\ -2x^3 + x^2 & -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{4} \\ \hline = x^2 - 3x & \\ -x^2 + \frac{1}{2}x & \\ \hline = -\frac{5}{2}x + 6 & \\ \frac{5}{2}x - \frac{5}{4} & \\ \hline = \frac{19}{4} & \end{array}$$

Figura 3

Es9)

Con $A(x) = -6x^4 + x^3 + 2x^2 - 5$ e $B(x) = x^2 + 2x - 1$ la divisione non è esatta; il resto è un polinomio di primo grado ed il quoziente un polinomio di secondo grado:

$R(x) = 73x - 35$, $Q(x) = -6x^2 + 13x - 30$. Le elaborazioni sono riportate in Figura 4.

Verifica

$$B(x) \cdot Q(x) + R(x) = (x^2 + 2x - 1)(-6x^2 + 13x - 30) + (73x - 35) = -6x^4 + 13x^3 - 30x^2 - 12x^3 + 26x^2 - 60x + 6x^2 - 13x + 30 + 73x - 35 = -6x^4 + x^3 + 2x^2 - 5$$

Es15)

Con $A(x) = x^{10} - x^8 + x^4 + 4x^2 - 22$ e $B(x) = x^4 - x^2 - 6$ la divisione non è esatta; il quoziente è il polinomio di sesto grado $Q(x) = x^6 + 6x^2 + 7$ ed il resto il polinomio di secondo grado $R(x) = 47x^2 + 20$. Per l'esecuzione della divisione osserviamo che le potenze della variabile x che compaiono nel dividendo e nel divisore hanno solo esponenti pari e ponendo $x^2 = t$ si può eseguire la divisione più agevolmente; una volta eseguita la divisione tra i due polinomi nella nuova variabile, si potranno scrivere quoziente e resto sostituendo t con x^2 . Le elaborazioni della divisione

$$(t^5 - t^4 + t^2 + 4t - 22) : (t^2 - t - 6)$$

Sono riportate in Figura 5.

Es9

$$\begin{array}{r|l} -6x^4 + x^3 + 2x^2 + 0x - 5 & x^2 + 2x - 1 \\ \underline{6x^4 + 12x^3 - 6x^2} & \\ = 13x^3 - 4x^2 + 0x & \\ \underline{-13x^3 - 26x^2 + 13x} & \\ = -30x^2 + 13x - 5 & \\ \underline{30x^2 + 60x - 30} & \\ = 73x - 35 & \end{array}$$

Figura 4

Es15

$$\begin{array}{r|l} t^5 - t^4 + 0t^3 + t^2 + 4t - 22 & t^2 - t - 6 \\ \underline{-t^5 + t^4 + 6t^3} & \\ = 6t^3 + t^2 + 4t & \\ \underline{-6t^3 + 6t^2 + 36t} & \\ = 7t^2 + 40t - 22 & \\ \underline{-7t^2 + 7t + 42} & \\ = 47t + 20 & \end{array}$$

Figura 5