Esercitazione sulle equazioni binomie nel campo reale

1) $\frac{x^4}{2}-8=0$, da cui $x^4=16$; l'equazione ammette due radici reali che sono tra loro opposte. Si ha:

$$x=\pm\sqrt[4]{16}=\pm\sqrt[4]{2^4}=\pm 2 \qquad S=\{-2;2\}$$

2) $\frac{x^2}{3}+\frac{1}{x^3}=0$, l'equazione diventa $\frac{x^5+3}{3x^3}=0$. Con la condizione di esistenza (C.d.E.) x≠0 l'equazione si riduce alla seguente

$x^5+3=0$, da cui $x^5=-3$, che ammette come unica radice reale $x=\sqrt[5]{-3}=-\sqrt[5]{3}$ $\qquad S=\{-\sqrt[5]{3}\}$

3) $5x^3+\frac{1}{25}=0$, l'equazione diventa $x^3=-\frac{1}{125}$, che si può scrivere nella forma

$x^3=\left(-\frac{1}{5}\right)^3$, la cui unica radice reale è $x=\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{5}\right)^3}=-\frac{1}{5}$. $\qquad S=\left\{-\frac{1}{5}\right\}$

4) $(2x+3)^6-1=0$, che si può scrivere nella forma $(2x+3)^6=1$, dalla quale si deduce che deve essere $2x+3=\pm\sqrt[6]{1}=\pm 1$, quindi

$(2x+3=-1)\vee(2x+3=1)$ e in definitiva si hanno le due radici reali

$x_1=-\frac{4}{2}=-2$, $x_2=-\frac{2}{2}=-1$. $\qquad S=\{-2;-1\}$

5) $x^2-\frac{1}{4x^2}=0$, l'equazione è definita sotto la condizione (C.d.E.) x≠0 e si riduce alla forma equivalente

$x^4=\frac{1}{4}$, che ammette come radici reali due numeri opposti. Si ha

$$x=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{4}}=\pm\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad S=\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

6) $m^2x^4+1=-m^2$, con $m\in\mathbb{R}$

L'equazione è parametrica.

Con m=0 diventa $0x^4=-1$, che non ha soluzioni.

Con m≠0 diventa

$m^2x^4 = -1 - m^2$, da cui $x^4 = -\frac{1+m^2}{m^2}$. Poiché il secondo membro è negativo l'equazione non ammette alcuna radice reale.

In conclusione, $\forall m \in \mathbb{R}$ l'equazione non ha soluzioni. $S = \varnothing$

7) $m^3x^3 - 8 = 0$, con $m \in \mathbb{R}$

L'equazione è parametrica.

Con m=0 diventa $0x^3 = 8$, che non ha soluzioni.

Con m≠0 diventa $x^3 = \frac{8}{m^3}$, da cui si ricava l'unica radice reale

$$x = \sqrt[3]{\frac{8}{m^3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{m}\right)^3} = \frac{2}{m}$$

Con $m = 0$, $S = \varnothing$; con $m \neq 0$, $S = \left\{\frac{2}{m}\right\}$

8) $m^3x^6 + 27 = 0$, con $m \in \mathbb{R}$

L'equazione è parametrica.

Con m=0 diventa $0x^6 = -27$, che non ha soluzioni.

Con m≠0 diventa $x^6 = -\frac{27}{m^3}$, che ammette due soluzioni reali opposte solo se m<0 che sono

$$x = \pm\sqrt[6]{\left(-\frac{3}{m}\right)^3} = \pm\sqrt{-\frac{3}{m}}.$$

Con $m = 0$, $S = \varnothing$; con $m < 0$, $S = \left\{-\sqrt{-\frac{3}{m}}; \sqrt{-\frac{3}{m}}\right\}$

9) $\left(m^2 - 1\right)^2 x^4 - m^4 = 0$

L'equazione è parametrica.

Con m=-1 oppure m=1 diventa $0x^4 = 1$, che non ha soluzioni.

Con m≠-1 e m≠1 l'equazione si riduce alla forma equivalente

$x^4 = \frac{m^4}{\left(m^2-1\right)^2}$, che ammette due radici reali opposte. Si ha:

$$x=\pm\sqrt[4]{\frac{m^4}{\left(m^2-1\right)^2}}=\pm\sqrt{\frac{m^2}{\left|m^2-1\right|}}=\pm\frac{|m|}{\sqrt{\left|m^2-1\right|}}$$

Con $(m=-1)\vee(m=1)$ $S=\varnothing$; con $m\neq\pm1, S=\left\{-\frac{|m|}{\sqrt{\left|m^2-1\right|}};\frac{|m|}{\sqrt{\left|m^2-1\right|}}\right\}$

10) $m\sqrt{m}x^8-\sqrt[3]{m^4}=0$, con $m\in\mathbb{R}$

L'equazione è parametrica ed è definita per m≥0.

Con m=0 l'equazione diventa $0x^8=0$, soddisfatta ∀x reale.

Con m>0 si ottiene la forma

$m\left(\sqrt{m}x^8-\sqrt[3]{m}\right)=0$ e semplificando il fattore m≠0 si ha l'equazione equivalente

$\sqrt{m}x^8-\sqrt[3]{m}=0$, da cui si ottiene

$x^8=\frac{\sqrt[3]{m}}{\sqrt{m}}$, quindi $x^8=\frac{\sqrt[6]{m^2}}{\sqrt[6]{m^3}}=\sqrt[6]{\frac{1}{m}}$.

L'equazione ammette due radici reali opposte che sono

$$x=\pm\sqrt[8]{\sqrt[6]{\frac{1}{m}}}=\pm\sqrt[48]{\frac{1}{m}}$$

[Con m=0, ∀x reale; con m>0, $S=\left\{-\sqrt[48]{\frac{1}{m}};\sqrt[48]{\frac{1}{m}}\right\}$]