

Equazione parametrica di secondo grado

Risolvere la seguente equazione

$$ax + \frac{a}{a-2} - \frac{2}{x(a+2)} = \frac{8}{a^2-4}$$

Soluzione

Osserviamo che l'equazione ha senso per $a \neq 2$, $a \neq -2$ e $x \neq 0$. Ciò premesso elaboriamo l'equazione per ridurla alla forma normale. Si ha:

$ax + \frac{a}{a-2} - \frac{2}{x(a+2)} = \frac{8}{a^2-4}$, diventa $ax + \frac{a}{a-2} - \frac{2}{x(a+2)} - \frac{8}{(a-2)(a+2)} = 0$, da cui, riducendo allo stesso denominatore

$$\frac{a(a-2)(a+2)x^2 + a(a+2)x - 2(a-2) - 8x}{(a-2)(a+2)x} = 0$$

Nel rispetto delle condizioni di esistenza (C.d.E.) $a \neq 2$, $a \neq -2$ e $x \neq 0$ si può eliminare il denominatore ottenendo l'equazione equivalente

$$a(a-2)(a+2)x^2 + (a^2 + 2a - 8)x - 2(a-2) = 0, \text{ che si può scrivere nella forma}$$

$$a(a-2)(a+2)x^2 + (a+4)(a-2)x - 2(a-2) = 0$$

Osserviamo che essendo $a \neq 2$ si può semplificare il fattore $(a-2)$ e passare all'equazione equivalente

$$a(a+2)x^2 + (a+4)x - 2 = 0$$

L'equazione ottenuta va risolta sotto le (C.d.E.) $a \neq 2$, $a \neq -2$ e $x \neq 0$.

- 1) Notiamo che per $a=0$ l'equazione si abbassa di grado diventando $4x - 2 = 0$, soddisfatta da $x = \frac{1}{2}$.
- 2) Con $a \neq 0$, aggiunta alle C.d.E. l'equazione è di secondo grado ed ha come discriminante

$$\Delta = (a+4)^2 + 8a(a+2) = (3a+4)^2.$$

Applicando la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado si ha

$$x = \frac{-(a+4) \pm \sqrt{(3a+4)^2}}{2a(a+2)} = \frac{-(a+4) \pm (3a+4)}{2a(a+2)}, \text{ da cui}$$

$$x_1 = \frac{-(a+4) - (3a+4)}{2a(a+2)} = \frac{-4(a+2)}{2a(a+2)} = -\frac{2}{a},$$

$$x_2 = \frac{-(a+4) + (3a+4)}{2a(a+2)} = \frac{2a}{2a(a+2)} = \frac{1}{a+2}$$

Accettabilità dei valori come soluzioni dell'equazione

I valori ottenuti sono diversi da zero e quindi sono accettabili come soluzioni dell'equazione in esame.

Sintesi

I casi che possono presentarsi per l'equazione in oggetto con le relative conclusioni sono riportati nella tabella che segue.

Valori del parametro	Cosa succede per l'equazione ?
Con $a=-2$ oppure $a=2$	L'equazione perde di significato
Con $a=0$	L'equazione diventa di primo grado ed ammette come soluzione $x = \frac{1}{2}$
Con $a \neq -2$ e $a \neq 0$ e $a \neq 2$	L'equazione ammette come soluzioni $x_1 = -\frac{2}{a}$, $x_2 = \frac{1}{a+2}$