

Equazione parametrica di secondo grado

Quesiti vari

Considerata l'equazione parametrica

$$x^2 - (3k - 1)x - 3k = 0$$

risolvere i seguenti quesiti.

- 1) Precisare per quali valori del parametro k l'equazione ammette due radici reali e distinte.
- 2) Determinare il valore del parametro k per il quale una radice è $x_1 = -\frac{2}{3}$. Per il valore del parametro trovato determinare il valore della seconda radice dell'equazione.
- 3) Stabilire se esistono valori del parametro k per i quali la somma delle due radici uguaglia il prodotto delle stesse; in caso affermativo determinare i valori delle radici.
- 4) Stabilire per quali valori del parametro k la somma dei reciproci dei quadrati delle radici è uguale a 5. Riconosciuto che esistono due valori per il parametro k che verificano la proprietà indicata, determinare in ciascun caso i valori delle radici delle corrispondenti equazioni.
- 5) Stabilire se esistono valori del parametro k per i quali la somma dei reciproci dei cubi delle radici è uguale a 63; in caso affermativo trovare il valore delle radici.
- 6) Determinare i valori del parametro k per i quali la differenza tra le due radici vale 8 e calcolare le corrispondenti radici.
- 7) Dimostrare che l'equazione ammette la radice $x = -1$ per ogni valore del parametro k .

Soluzione

- 1) L'equazione ammette due radici reali e distinte se il suo discriminante è strettamente positivo:
 $\Delta > 0$

Poiché $\Delta = (3k - 1)^2 + 12k = (3k + 1)^2$, si deduce che $\forall k \neq -\frac{1}{3}$ l'equazione ammette due radici reali distinte.

- 2) Per determinare il valore del parametro si deve imporre che il valore $-\frac{2}{3}$ soddisfi l'equazione. Si ha

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - (3k - 1)\left(-\frac{2}{3}\right) - 3k = 0, \text{ da cui } k = -\frac{2}{9}. \text{ L'equazione corrispondente è}$$

$$3x^2 + 5x + 2 = 0 \text{ le cui radici sono } x_1^1 = \frac{-5 \pm 1}{6}, \text{ quindi } x_1 = -1, x_2 = -\frac{2}{3}.$$

- 3) La relazione che deve essere verificata è $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$, che, tenute presenti le relazioni tra la somma e del prodotto delle radici delle radici con i coefficienti dell'equazione di secondo grado ridotta alla forma normale $ax^2 + bx + c = 0$, diventa

$$-\frac{b}{a} = \frac{c}{a}, \text{ quindi } (3k-1) = -3k, \text{ da cui } k = \frac{1}{6}.$$

L'equazione corrispondente è $2x^2 + x - 1 = 0$, le cui radici sono $x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{2}$.

4) La relazione che deve essere soddisfatta dalle due radici è

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 5, \text{ che diventa } \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 x_2^2} = 5, \text{ da cui } \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{(x_1 x_2)^2} = 5 \quad \text{e introducendo i}$$

coefficienti a, b, c dell'equazione otteniamo

$$\frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2} = 5, \text{ che semplificata diventa } \frac{b^2 - 2ac}{c^2} = 5, \text{ cioè } \frac{(3k-1)^2 + 6k}{9k^2} = 5$$

Con $k \neq 0$, ridotta alla forma normale diventa $36k^2 = 1$, soddisfatta da $k = \pm \frac{1}{6}$.

Sussistono i due casi:

a) per $k = \frac{1}{6}$ si ha l'equazione $2x^2 + x - 1 = 0$, le cui radici sono $x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{2}$;

b) per $k = -\frac{1}{6}$ si ha l'equazione $2x^2 + 3x + 1 = 0$, le cui radici sono $x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{2}$.

5) La relazione che deve essere soddisfatta dalle radici è

$$\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} = 63, \text{ che diventa } \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^3 x_2^3} = 63, \text{ quindi } \frac{(x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)}{(x_1 x_2)^3} = 63.$$

$$\frac{(3m-1)^3 - 3(-3k)(3m-1)}{(-3k)^3} = 63 \text{ e dopo alcune elaborazioni si ottiene } k^3 = \frac{1}{27 \cdot 64}, \text{ da cui}$$

$$k = \frac{1}{12}.$$

L'equazione corrispondente è $4x^2 + 3x - 1 = 0$, le cui radici sono $x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{4}$.

6) Per risolvere il quesito impostiamo il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = 8 \\ x_1 + x_2 = 3k - 1 \\ x_1 x_2 = -3k \end{cases}$$

Elaborando le prime due equazioni esprimiamo x_1, x_2 in funzione di k e sostituiamo le due espressioni nella terza equazione. Si ha

$$x_1 = \frac{3k-9}{2}, \quad x_2 = \frac{3k+7}{2}, \quad \text{quindi } k \text{ deve verificare l'equazione}$$

$$\frac{3k-9}{2} \cdot \frac{3k+7}{2} = -3k, \text{ che diventa } 3k^2 + 2k - 21 = 0, \text{ le cui radici sono } k_1 = -3, k_2 = \frac{7}{3}.$$

Sussistono i seguenti casi:

- a) $k_1 = -3$, si ha l'equazione $x^2 + 10x + 9 = 0$, le cui radici sono $x_1 = -9, x_2 = -1$;
 - b) $k_2 = \frac{7}{3}$, si ha l'equazione $x^2 - 6x - 7 = 0$, le cui radici sono $x_1 = -1, x_2 = 7$.
- 7) Osserviamo preliminarmente che nei diversi quesiti affrontati, allorché abbiamo determinato i valori delle due radici, una delle due è stata sempre -1. Per riconoscere la proprietà richiesta dal quesito si deve verificare che $x=-1$ soddisfa l'equazione indipendentemente dal valore di k . Ebbene risulta:

$$(-1)^2 - (3k-1)(-1) - 3k = 1 + 3k - 1 - 3k = 0, \quad \forall k$$

E ciò prova la tesi.

E' appena il caso di far notare che il polinomio al primo membro dell'equazione si può scomporre nella forma

$$x^2 - (3k-1)x - 3k = (x+1)(x-3k)$$

e ciò prova che detto polinomio si annulla per $x=-1$, indipendentemente mente dal valore che si assegna al parametro k . C.V.D.