

Discussione di equazioni parametriche di secondo grado

1) $kx^2 - (3k-1)x = 0$

a. Con $k=0$ l'eq. Si abbassa di grado e ammette la sola soluzione $x=0$

b. Con $k \neq 0$ si hanno due soluzioni $x_1 = 0, x_2 = \frac{3k-1}{k}$

2) $(k-1)x^2 + \frac{x}{k-1} = 0$

L'equazione per la sua esistenza richiede la C.d.E $k \neq 1$.

Ridotta alla forma normale diventa

$$(k-1)^2 x^2 + x = 0 \quad \text{Si tratta di un'equazione spuria.}$$

Scrivendola nella forma

$$x((k-1)^2 x + 1) = 0$$

si riconosce che ammette la radice fissa $x=0$; la seconda radice si ottiene uguagliando a zero il secondo fattore

$$(k-1)^2 x + 1 = 0, \text{ che nel rispetto della C.d.E } k \neq 1 \text{ fornisce } x = -\frac{1}{(k-1)^2}.$$

3) $x^2 + (k^2 - 3k)x - 3k^3 = 0$

a. L'equazione rimane di secondo grado per ogni valore reale del parametro k .

b. Il discriminante dell'equazione è $\Delta = (k^2 - 3k)^2 + 12k^3 = \dots = k^2(k+3)^2$. Osserviamo che $\Delta \geq 0$ per ogni k reale, dunque l'equazione ammette in ogni caso due radici reali.

c. Le radici sono $x_1, x_2 = \frac{-(k^2 - 3k) \pm \sqrt{k^2(k+3)^2}}{2} = \frac{-(k^2 - 3k) \pm k(k+3)}{2} = \frac{k((-k+3) \pm (k+3))}{2}$, quindi $x_1 = -k^2, x_2 = 3k$

d. Le due radici sono coincidenti con $k=0$ oppure con $k=-3$. In particolare:

i. con $k=0$ risulta $x_1 = x_2 = 0$;

ii. con $k=-3$ risulta $x_1 = x_2 = -9$

4) $\frac{x^2}{k} - \frac{x^2 - 2x}{k-2} = 0$

a. Per l'esistenza dell'equazione devono essere soddisfatte le C.d.E. $(k \neq 0 \wedge k \neq 2)$

b. Nel rispetto delle C.d.E. l'equazione si riduce alla forma $x^2 - kx = 0$; equazione spuria.

- c. L'equazione rimane di secondo grado al variare di k perché il coefficiente di x^2 non dipende dal parametro. L'equazione ammette la radice fissa $x_1=0$; la seconda radice è $x_2=k$. Osserviamo che dovendo essere $k \neq 0$ per le C.d.E., le due radici sono distinte.

5) $1 - k + \frac{x^2}{k-1} = 0$

- a. Per l'esistenza dell'equazione deve essere soddisfatta la C.d.E. $k \neq 1$.
 b. Nel rispetto della C.d.E. l'equazione si riduce alla forma $x^2 = (k-1)^2$. Si tratta di un'equazione pura che ammette come radici due valori opposti: $x_1 = 1-k$, $x_2 = k-1$. Osserviamo che per i valori ammessi del parametro k le due radici rimangono distinte.

6) $\frac{k}{x} - \frac{x+1}{k+1} = 0$

- a. Si tratta di un'equazione razionale fratta parametrica per la cui esistenza devono essere soddisfatte le C.d.E. ($k \neq -1 \wedge x \neq 0$).
 b. L'equazione ridotta alla forma normale è $x^2 + x - k(k+1) = 0$; l'equazione rimane di secondo grado per ogni valore del parametro ammissibile.
 c. Il discriminante dell'equazione è $\Delta = 1 + 4k(k+1) = (2k+1)^2$, che è non negativo, dunque l'equazione ammette radici reali per ogni $k \neq -1$.
 d. I valori delle radici sono $x_2^1 = \frac{-1 \pm \sqrt{(2k+1)^2}}{2} = \frac{-1 \pm (2k+1)}{2}$, quindi $x_1 = -k-1$, $x_2 = k$.
 e. Le due radici coincidono per $k = -\frac{1}{2}$ e risulta: $x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}$

f. Discussione sull'accettabilità delle radici

- i. Il valore $x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}$, ottenuto con $k = -\frac{1}{2}$, è accettabile perché verifica la C.d.E. $x \neq 0$.
 ii. Con $k=0$ la radice $x_1 = -k-1 = -1$ è accettabile, mentre $x_2 = k = 0$, non è accettabile.
 iii. Con $(k \neq -1) \wedge (k \neq -\frac{1}{2}) \wedge (k \neq 0)$ le radici $x_1 = -k-1$, $x_2 = k$, sono entrambe accettabili.

7) $\frac{x}{k-2} - \frac{k}{x+2} = 0$

- a. L'equazione è razionale fratta ed esiste se sono soddisfatte le C.d.E. ($k \neq 2 \wedge x \neq -2$).
 b. L'equazione ridotta alla forma normale diventa $x^2 + 2x - k^2 + 2k = 0$, ed è di secondo grado per ogni $k \neq 2$.
 c. Per il discriminante Δ dell'equazione osserviamo che $\frac{\Delta}{4} = (k-1)^2$, che è non negativo, dunque l'equazione ammette radici reali per ogni $k \neq 2$.

d. I valori delle radici sono $x_2^1 = -1 \pm (k-1)$, quindi $x_1 = -k$, $x_2 = k-2$.

e. Le due radici sono coincidenti per $k=1$ e valgono $x_1 = x_2 = -1$

f. Discussione sull'accettabilità delle radici

i. Il valore comune delle radici $x_1 = x_2 = -1$, ottenuto per $k=1$, è accettabile.

ii. Con $k \neq 2$ e $k \neq 1$ occorre confrontare i valori delle due radici con il valore $x=-2$ che non è ammesso. Osserviamo che:

1. $x_1 = -k \neq -2$, quindi si accetta;

2. $x_2 = k-2 = -2$, si verifica per $k=0$. Poiché $k=0$ è un valore ammissibile per il parametro, si deduce che per questo valore del parametro la radice $x_2 = k-2$ non è accettabile come soluzione dell'equazione.

Concludiamo che con $k \neq 2$ e $k \neq 1$ si ha la sola soluzione $x=-k$.