Problema di decisione in condizioni di certezza

Individuare l'operazione finanziaria più conveniente in base al tasso effettivo di investimento

Problema[(1)]

Una persona intende investire la somma di 24.000 euro e riceve le due seguenti proposte:

a) ricevere dopo 6 anni il montante di 40.000 euro;

b) ricevere per 6 anni, alla fine di ogni anno, una rata di 5.200 euro.

Determinare quali sono i tassi effettivi di investimento con i quali sono state elaborate le due proposte e decidere quale delle due sia più conveniente per l'investitore.

Elaborazioni

1) Detto i_a il tasso di capitalizzazione (netto) con cui è investita la somma di 24.000 euro per 6 anni, ovviamente in regime di capitalizzazione composta, in base alla proposta (a) il montante M prodotto alla fine del periodo di investimento deve essere uguale a 40.000 euro, dunque deve sussistere l'uguaglianza

$M = C(1+i_a)^6$, dove M=€ 40.000, C=€24.000, da cui $i_a = \sqrt[6]{\frac{M}{C}} - 1$.

Sostituendo i valori noti si ottiene

$$i_a = \sqrt[6]{\frac{40000}{24000}} - 1 = \sqrt[6]{\frac{5}{3}} - 1 \approx 0,0889 = 8,89\%$$

2) Sia i_b il tasso di investimento relativo alla seconda proposta. Per determinare il valore di i_b calcoliamo il valore attuale della rendita di 6 rate costanti di importo R=6.000 euro che vengono riscosse alla fine ogni anno (rendita temporanea posticipata), riferita alla data di stipula dell'ipotetico contratto di investimento. Il valore ottenuto deve coincidere con la somma investita, quindi 24.000 euro.

Il valore attuale è

$$V_a = R\left[(1+i_b)^{-1} + (1+i_b)^{-2} + (1+i_b)^{-3} + (1+i_b)^{-4} + (1+i_b)^{-5} + (1+i_b)^{-6}\right] = R \cdot \frac{1-(1+i_b)^{-6}}{i_b}$$

Deve sussistere l'uguaglianza $€24.000 = €5.200 \cdot \frac{1-(1+i_b)^{-6}}{i_b} \to \frac{60}{13} = \frac{1-(1+i_b)^{-6}}{i_b}$.

Ponendo brevemente 1+ i_b =x si ha $\frac{60}{13} = \frac{1-x^{-6}}{x-1}$, da cui (2.1)

$$\frac{60}{13} = \left(1 - \frac{1}{x^6}\right) \cdot \frac{1}{x-1} \to \frac{60}{13} = \left(\frac{x^6-1}{x^6}\right) \cdot \frac{1}{x-1} \to \frac{60}{13} = \frac{(x^3-1)(x^3+1)}{x^6} \cdot \frac{1}{x-1} \to \frac{60}{13} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)(x^3+1)}{x^6(x-1)}$$

(1) Problema n. 123 riportato a pag. 180 del volume Matematica per indirizzo economico, vol 3, Tramontana- Autori A. Gambotto, B. Consolini, D. Mazzone

Poiché ci si aspetta che debba essere i_b>0, siamo interessati a trovare valori di x>1 che soddisfano l'equazione, dunque il fattore (x-1) che figura nell'espressione trovata può essere semplificato e si ottiene

$$\frac{60}{13}=\frac{\left(x^2+x+1\right)\left(x^3+1\right)}{x^6}$$

che per $x\neq 0$ è equivalente all'equazione

$$\frac{60}{13}x^6=\left(x^2+x+1\right)\left(x^3+1\right) \qquad (2.2)$$

Risolviamo l'equazione ottenuta graficamente confrontando il diagramma della funzione $f(x)=\frac{60}{13}x^6$ con quello della funzione $g(x)=\left(x^2+x+1\right)\left(x^3+1\right)$ limitandoci ad individuare eventuali intersezioni dei grafici per x>1.

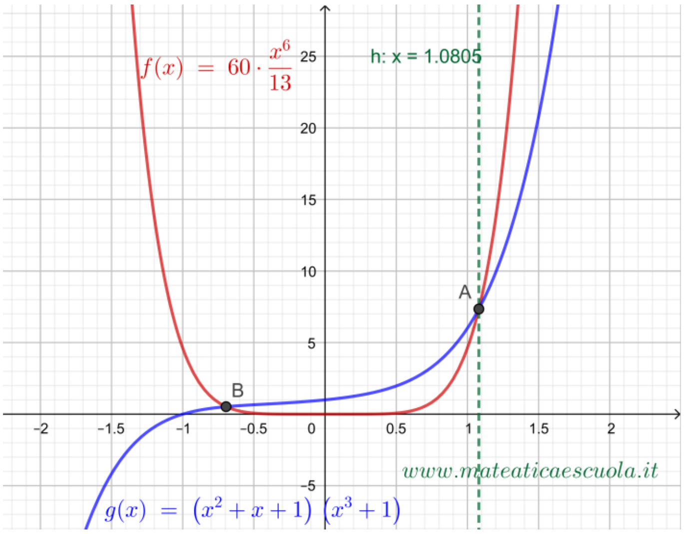

Figura 1

In Figura 1, con opportuna scelta delle unità di misura per i due assi cartesiani, sono riportati parzialmente i due diagrammi con indicazione dei due punti di intersezione A e B; A è il punto che rappresenta la soluzione cercata con $x_A \simeq 1{,}0805$. La ricerca operativa di questo valore si può eseguire applicando uno dei metodi noti; tra questi il metodo di bisezione è abbastanza veloce e comodo da implementare in un foglio elettronico (oppure utilizzando una buona calcolatrice scientifica). Con l'aiuto del grafico, osservato che per 1<x< x_A risulta $f(x)<g(x)$ e per $x > x_A$ risulta $f(x)>g(x)$ e verificato che

f(1,08)=7,3240..., g(1,08)=7,3592…, quindi f(1,08)< g(1,08);

f(1,081)=7,3648…, g(1,081)=7,3544…, quindi f(1,081) > g(1,081);

si deduce che 1,08<x_A<1,081 e si procede con il metodo di bisezione assumendo come punto spia il punto medio tra 1,08 e 1,081, che è 1,0805 in cui si calcolano le due funzioni e se ne confrontano i valori. Si procede in questo modo migliorando l'approssimazione desiderata.

In conclusione, il tasso di investimento che fornisce la rendita temporanea annua di 6 rate da 5.200 euro è 8,05% e dunque inferiore a quello effettivo applicato nella proposta (a), per cui questa offerta risulta essere migliore per l'investitore.

Nota di approfondimento (utilizzo del foglio elettronico)

Ritornando all'equazione (2.1) o all'equivalente (2.2) da risolvere presentiamo un metodo di ricerca diverso per la radice x>1 che sfrutta il foglio elettronico.

Scritta la (2.1) nella forma

$$\frac{1-x^{-6}}{x-1}-\frac{60}{13}=0$$

poniamo $\varphi(x)=\frac{1-x^{-6}}{x-1}-\frac{60}{13}$

Si deve trovare il valore approssimato $x=\alpha>1$ tale che si abbia $\varphi(\alpha)=0$.

La funzione per $x>1$ è continua e risulta

$$\varphi(1,08)=\frac{1-1,08^{-6}}{0,08}-\frac{60}{13}\simeq 0,007495>0;$$

$$\varphi(1,09)=\frac{1-1,09^{-6}}{0,09}-\frac{60}{13}\simeq -0,1295<0;$$

per il **teorema di esistenza degli zeri per le funzioni continue** la funzione $\varphi(x)$ deve ammettere almeno uno zero internamente all'intervallo [1,08;1,09]. Per determinare un valore approssimato di $x=\alpha$ scegliamo come punto spia il punto medio dell'intervallo indicato $x_m=\frac{1,08+1,09}{2}=1,085$; calcoliamo $\varphi(1,085)$.

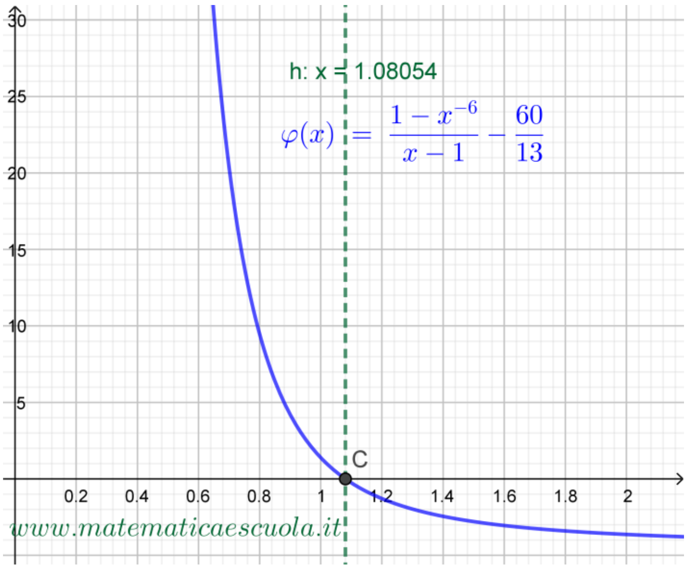

Figura 2

Risulta $\varphi(1,085)\simeq -0,0618<0$, quindi il punto $x=\alpha$ è interno all'intervallo [1,08;1,085]; si procede ancora calcolando la funzione $\varphi(x)$ nel punto medio x_m del nuovo intervallo

$$x_m=\frac{1,08+1,085}{2}=1,0825$$

Si ha $\varphi(1,0825)=\frac{1-1,0825^{-6}}{0,0825}-\frac{60}{13}$ $\simeq -0,0274<0$

si deduce che $x=\alpha$ è interno all'intervallo [1,08;1,0825].

Ancora, con il nuovo punto medio $x_m=\frac{1,08+1,0825}{2}=1,08125$

si ottiene $\varphi(1,08125)\simeq -0,00998$.

Ricerca del valore approssimato di α con il metodo di bisezione

$$\boxed{\phi(x)=\frac{1-x^{-6}}{x-1}-\frac{60}{13}}$$

	a=1,08	*b=1,09*	$\alpha=x_m$		
n	x_1	x_2	$x_m=(x_1+x_2)/2$	$\phi(x_m)$	$l=x_2-x_1$
0	1,0800000	1,0900000	1,0850000	-0,061797	0,0100000
1	1,0800000	1,0850000	1,0825000	-0,027357	0,0050000
2	1,0800000	1,0825000	1,0812500	-0,009983	0,0025000
3	1,0800000	1,0812500	1,0806250	-0,001257	0,0012500
4	1,0800000	1,0806250	1,0803125	0,003116	0,0006250
5	1,0803125	1,0806250	1,0804688	0,000929	0,0003125
6	1,0804688	1,0806250	1,0805469	-0,000164	0,0001562
7	1,0804688	1,0805469	1,0805078	0,000382	0,0000781
8	1,0805078	1,0805469	1,0805273	0,000109	0,0000391
9	1,0805273	1,0805469	1,0805371	-0,000028	0,0000195

La ricerca procede fino ad ottenere il valore richiesto con la precisione prefissata. Possiamo arrestare la ricerca al settimo passaggio dal quale deduciamo che $\alpha\approx 1,0805078$, quindi il tasso di investimento è $i_b\approx 8,05078$ %. Assumendo $i_b=0,0805$ la quarta cifra decimale è esatta.

I risultati delle elaborazioni eseguite con il foglio di calcolo Excel sono indicate nella tabella riportata.