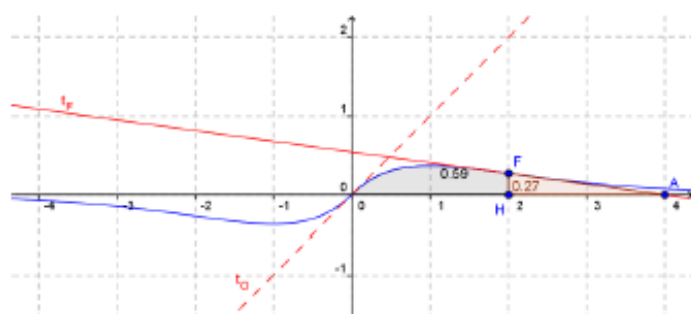


Dispensa didattica 02

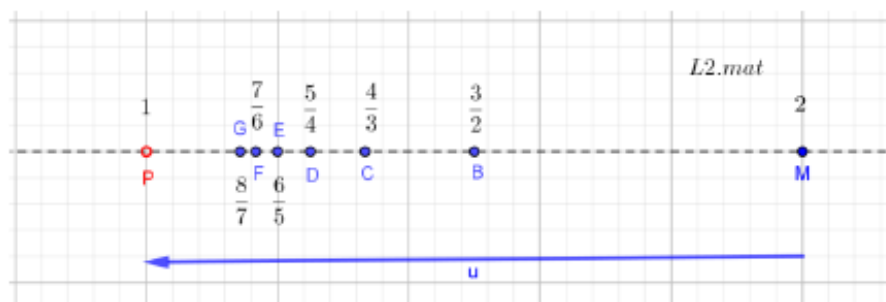


Versione 26-nov-2021

Introduzione all'Analisi Matematica

Topologia in \mathbb{R} ed Insiemi Numerici

Note Teoriche ed Esercizi Svolti sugli Insiemi Numerici



Luigi Lecci

www.matematicaescola.it

Presentazione

La dispensa ha come obiettivo quello di fornire gli elementi essenziali per "introdurre lo Studente nel campo dell'Analisi Matematica".

Dopo aver fornito gli elementi essenziali sulle relazioni tra due insiemi qualsiasi, sulle proprietà delle relazioni d'ordine e riconosciuto che il campo dei numeri reali \mathbb{R} è totalmente ordinato, mi soffermo su alcune proprietà di cui gode la funzione valore assoluto che ricorrono più frequentemente nell'operatività con i numeri reali.

Si definiscono gli intervalli in \mathbb{R} , quindi si passa alla definizione di maggiorante, di minorante, di estremo superiore e di estremo inferiore, di massimo e di minimo per un insieme numerico e se ne enunciano le relative proprietà caratteristiche.

Sono riportati brevi cenni sugli insiemi numerici separati e sugli insiemi numerici contigui e sviluppati alcuni esercizi esemplificativi.

Nella parte finale della dispensa, riservata alla topologia in \mathbb{R} , si introducono le definizioni di intorno di un punto reale x_0 e di $+\infty$ o $-\infty$, si specificano in particolare le caratteristiche di un intorno circolare, di intorno destro o sinistro di un punto reale. Si procede con l'importante concetto di punto di accumulazione per un insieme numerico, concetto che riveste importanza fondamentale nello studio del comportamento di una qualsiasi funzione "in prossimità" di un particolare punto reale o un punto all'infinito.

Le definizioni ed i concetti introdotti nella dispensa sono corredati da opportuni esempi al fine di guidare lo Studente nell'acquisizione delle corrispondenti competenze.

La dispensa si chiude con lo studio dell'insieme numerico descritto dalla successione di punti generati da una frazione parametrica; nella risoluzione dell'esercizio affrontato si riprendono diversi concetti introdotti nella dispensa.

Buon lavoro.

L'Autore

Della presente opera sono riservati tutti i diritti d'Autore così come previsto dalla Legge 22/04/1941, n.633, pubblicata sulla Gazzetta Ufficiale n.166 il 16/07/1941 e successive modifiche, pertanto è vietata la riproduzione di qualsiasi parte e con qualsiasi mezzo senza la preventiva specifica autorizzazione da parte dell'Autore.

Sommario

Note teoriche sul campo dei numeri reali e sui suoi sottoinsiemi	4
Il campo \mathbb{R} dei numeri reali (la struttura algebrica).....	4
Relazione tra due insiemi. Prodotto cartesiano di due o più insiemi. Relazione binaria interna ad un insieme.	5
Esempi svolti ed esercizi proposti sul prodotto cartesiano	7
Esempi di relazioni tra insiemi.....	8
Relazioni d'ordine e Insiemi ordinati.....	9
Relazioni d'ordine in \mathbb{R} . Ordinamento nel campo dei numeri reali $(\mathbb{R}, +, \cdot)$	10
Alcune proprietà delle disuguaglianze in \mathbb{R}	12
L'insieme \mathbb{R} ampliato: \mathbb{R}^*	13
Struttura metrica in \mathbb{R}	13
Proprietà del valore assoluto.....	13
Definizione di distanza tra due punti reali.....	15
Intervalli di \mathbb{R}	16
Operazioni in \mathbb{R}^* ampliato con $-\infty$ e $+\infty$	17
Forme indeterminate	17
Proprietà di un generico sottoinsieme A dell'asse reale: $A \subseteq \mathbb{R}$	18
Maggioranti, minoranti, di un insieme numerico. Insiemi numerici limitati e non limitati. Massimo e minimo di un insieme numerico.....	18
Estremo superiore, estremo inferiore: definizioni e relative proprietà caratteristiche.....	21
Teorema (di esistenza ed unicità dell'estremo superiore).....	22
Teorema (di esistenza ed unicità dell'estremo inferiore)	23
Esercizi svolti.....	24
Insiemi numerici separati ed insiemi numerici contigui.....	26
Esercizi sugli insiemi numerici separati	26
Elementi di Topologia() in $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$	27
Intorni di un punto x_0 reale	27
Postulato della continuità della retta (Formulazione di G. F. Cantor).....	28
Definizione (generale di intorno completo di $x_0 \in \mathbb{R}$) (17).....	28
Frontiera di un insieme. Insiemi aperti, insiemi chiusi. Punti di accumulazione. Insieme derivato di un insieme. Punti isolati.	29
Esercizio svolto(insieme numerico descritto da una frazione parametrica).....	30