

Trigonometria

Su un triangolo rettangolo

Problema (Angoli e perimetro di un triangolo rettangolo)

La differenza tra le tangenti goniometriche degli angoli acuti di un triangolo rettangolo è $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ e l'altezza relativa all'ipotenusa misura 8cm. Determinare le ampiezze degli angoli del triangolo e le misure dei lati.

Elaborazioni

1) Ampiezze degli angoli del triangolo

Consideriamo il triangolo rettangolo ABC con l'angolo retto in C e siano α e β gli angoli acuti nei vertici A e B; supponiamo che si risulti $\tan(\alpha) - \tan(\beta) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, quindi che $0^\circ < \beta < \alpha < 90^\circ$.

Poiché i due angoli α e β sono complementari, $\beta = 90^\circ - \alpha$, è noto che

$$\tan(\beta) = \tan(90^\circ - \alpha) = \cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)}.$$

La relazione goniometrica

$$\tan(\alpha) - \tan(\beta) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ diventa}$$

$$\tan(\alpha) - \frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \rightarrow$$

$3\tan^2(\alpha) - 2\sqrt{3} \cdot \tan(\alpha) - 3 = 0$. Risolvendo l'equazione ottenuta si determina l'ampiezza dell'angolo α . Risulta:

$$\tan(\alpha) = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3+9}}{3} = \frac{\sqrt{3} \pm 2\sqrt{3}}{3}$$

Dei due valori uno è negativo e si scarta, l'altro è positivo e sia accetta: $\tan(\alpha) = \sqrt{3}$, quindi $\alpha = 60^\circ$ e $\beta = 30^\circ$.

2) Misure dei lati del triangolo ABC

Sia CH l'altezza del triangolo relativa all'ipotenusa. Sussistono le seguenti relazioni:

$$\overline{AC} = \frac{\overline{CH}}{\sin(\alpha)} = \frac{8\text{cm}}{\sin(60^\circ)} = 8\text{cm} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{3}}{3}\text{cm}; \quad \overline{BC} = \frac{\overline{CH}}{\sin(\beta)} = \frac{8\text{cm}}{\sin(30^\circ)} = 16\text{cm};$$

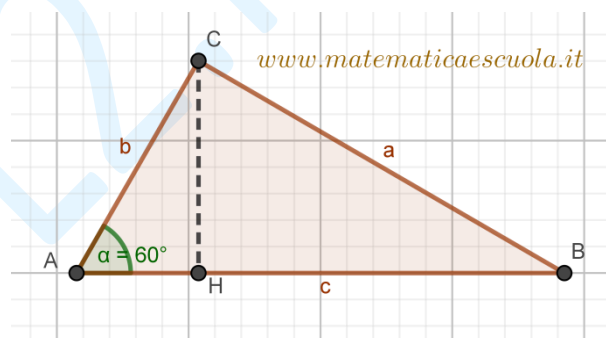


Figura 1

$$\overline{AH} = \overline{AC} \cdot \cos(60^\circ) = \frac{16\sqrt{3}}{3} \text{ cm} \cdot \frac{1}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \text{ cm}; \quad \overline{HB} = \overline{BC} \cdot \cos(30^\circ) = 16 \text{ cm} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3} \text{ cm},$$

$$\text{dunque } \overline{AB} = \overline{AH} + \overline{HB} = \left(\frac{8\sqrt{3}}{3} + 8\sqrt{3} \right) \text{ cm} = \frac{32\sqrt{3}}{3} \text{ cm}.$$

Studio L2.mat