Disequazioni goniometriche

1) $2senx\cos^2 x-\cos^2 x-2senx\cos x+\cos x\geq 0$

Il primo membro della disequazione si può scomporre in fattori come di seguito indicato

$\cos x(2senx-1)(\cos x-1)\geq 0$.

A questo punto occorre studiare il segno di ciascun fattore e trovare gli zeri limitatamente al primo giro: $0\leq x\leq 2\pi$. Risulta

$\cos x\geq 0$, per $\left(0\leq x\leq \frac{\pi}{2}\right)\vee\left(\frac{3\pi}{2}\leq x\leq 2\pi\right)$;

$2senx-1\geq 0$, per $\frac{\pi}{6}\leq x\leq\frac{5\pi}{6}$;

$\cos x-1\geq 0$ è verificata solo l'uguaglianza per i due valori $x=0$, $x=2\pi$.

Confrontando il segno dei tre fattori si riscontra che

$\cos x(2senx-1)(\cos x-1)\geq 0$ è soddisfatta per i valori di x tali che
$\left(0\leq x\leq\frac{\pi}{6}\right)\vee\left(\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{5\pi}{6}\right)\vee\left(\frac{3\pi}{2}\leq x\leq 2\pi\right)$.

L'insieme di tutte le soluzioni della disequazione è $S=\bigcup_{k\in Z}\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{\pi}{6}+2k\pi\right]\cup\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right]$.

2) $\frac{\cos x-sen(2x)}{1-4sen^2 x}<0$, con $0\leq x\leq 2\pi$

Possiamo semplificare la frazione sfruttando una delle formule di duplicazione e fattorizzando numeratore e denominatore. Risulta

$\frac{\cos x-sen(2x)}{1-4sen^2x}<0\to\frac{\cos x-2senx\cos x}{(1-2senx)(1+2senx)}<0\to\frac{\cos x(1-2senx)}{(1-2senx)(1+2senx)}<0$, da cui $\frac{\cos x}{1+2senx}<0$, con le condizioni di equivalenza (C.d.Eq.) $\left(x\neq\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)\wedge\left(x\neq\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right)$, $k\in Z$.

Limitatamente al primo giro $[0;2\pi]$ risulta

$\cos x>0$, per $\left(0\leq x<\frac{\pi}{2}\right)\vee\left(\frac{3\pi}{2}<x\leq 2\pi\right)$;

$2senx+1>0$, per $\left(0\leq x<\frac{7\pi}{6}\right)\vee\left(\frac{11\pi}{6}<x\leq 2\pi\right)$.

Eseguendo il prodotto dei segni tra il numeratore ed il denominatore, per x variabile nel primo giro, si riscontra che la frazione in esame è negativa nell'insieme $S=\left]\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{6}\right[\cup\left]\frac{5\pi}{6};\frac{7\pi}{6}\right[\cup\left]\frac{3\pi}{2};\frac{11\pi}{6}\right[$, che rappresenta l'insieme delle soluzioni cercato .

3) $\frac{2}{senx}-\frac{3}{\cos^2 x}\geq 0$, con $0\leq x\leq 2\pi$

Riduciamo il primo membro ad un'unica frazione

$$\frac{2\cos^2 x-3senx}{\operatorname{sen}x\cos^2 x}\geq 0\rightarrow\frac{2\left(1-sen^2 x\right)-3senx}{\operatorname{sen}x\cos^2 x}\geq 0\rightarrow\frac{2sen^2 x+3senx-2}{\operatorname{sen}x\cos^2 x}\leq 0$$

Osserviamo che la frazione è definita per ogni $x\neq k\frac{\pi}{2}$,con k∈Z. Poiché per i valori del dominio di definizione risulta $\cos^2 x>0$ la disequazione è equivalente alla seguente

$$\frac{2sen^2 x+3senx-2}{\operatorname{sen}x}\leq 0\,. \qquad (*)$$

Studiamo il segno e gli eventuali zeri del numeratore, quindi il segno del denominatore in $D=\left]0;2\pi\right[-\left\{\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right\}$.

$N(x)=2sen^2 x+3senx-2\geq 0$ se e solo se $(senx\leq -2)\vee\left(senx\geq\frac{1}{2}\right)$, dunque per ogni x del dominio D tale che $senx\geq\frac{1}{2}$. Questa disuguaglianza è verificata per $\left(\frac{\pi}{6}\leq x\leq\frac{5\pi}{6}\right)\wedge\left(x\neq\frac{\pi}{2}\right)$.

$D(x)>0\Leftrightarrow senx>0$; questa disuguaglianza è verificata per i valori $(0<x<\pi)\wedge\left(x\neq\frac{\pi}{2}\right)$. Dallo studio del prodotto dei segni del numeratore e del denominatore si ricava che la disuguaglianza (*) limitatamente al dominio D è soddisfatta nell'insieme $S=\left]0;\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6};\pi\right[$.

4) $\frac{sen(5x)+sen(3x)}{sen(4x)}>0$ con x∈R.

Trasformiamo la frazione applicando una delle formule di prostaferesi[1].

[1] Ricordiamo che sussiste la seguente formula di prostaferesi $senp+senq=2sen\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$, per ogni p e q reali.

$$\frac{2sen\left(\frac{5x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{5x-3x}{2}\right)}{sen(4x)}>0 \rightarrow \frac{2sen(4x)\cos x}{sen(4x)}>0$$, equivalente alla seguente $\cos x>0$, sotto le

C.d.Eq. $4x \neq k\pi$, quindi per ogni $x \neq k\frac{\pi}{4}$, con k∈Z. Poiché la funzione cosx è positiva nel primo e nel quarto quadrante, l'insieme delle soluzioni della disequazione in esame è

$$S=\left\{x \in R \middle| \left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) \wedge \left(x \neq \pm\frac{\pi}{4}+2k\pi\right) \wedge (x \neq 2k\pi), k \in Z\right\}$$

5) $\cos(5x)-\cos(7x)+sen(6x)<0$, con $0 \leq x \leq 2\pi$

Applicando la formula di prostaferesi per la differenza di due coseni[(2)] si ha

$$-2sen\left(\frac{5x+7x}{2}\right)sen\left(\frac{5x-7x}{2}\right)+sen(6x)<0 \rightarrow -2sen(6x)sen(-x)+sen(6x)<0 \rightarrow$$
$$sen(6x)\left[2sen(x)+1\right]<0$$

Studiando il segno dei due fattori ed eseguendo il prodotto dei segni limitatamente al primo giro si ricava il seguente insieme di soluzioni:

$$S=\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6};\pi\right[\cup \left]\frac{4\pi}{3};\frac{3\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{3};\frac{11\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{11\pi}{6};2\pi\right[$$

[(2)] Ricordiamo che sussiste la formula seguente $\cos p-\cos q=-2sen\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$, per ogni p e q reali.