Sulle variabili casuali

V.C. discreta dedotta dalla funzione di ripartizione. Quesiti vari

Considerata la variabile casuale discreta X la cui funzione di ripartizione è

$$F(x)=\begin{cases} 0 & per & x<-1 \\ 0,25 & per & -1\le x<1 \\ 0,375 & per & 1\le x<3 \\ 0,75 & per & 3\le x<5 \\ 1 & per & x\ge 5 \end{cases}$$

risolvere i seguenti quesiti

1) Determinare i valori che può assumere la v.c. X con le rispettive probabilità.
2) Calcolare la probabilità P(X=0), P(X≤2), P(X>3)
3) Calcolare la probabilità P(1≤X≤5)
4) Calcolale la moda e la mediana della v.c.
5) Calcolare il valor medio
6) Calcolare la varianza Var(X)
7) Considerata la v.c. Y=25-3X, calcolare il valore medio e la varianza
8) Calcolare la probabilità P(Y<25)

Soluzione

1) Dalla struttura della funzione di ripartizione F(x) si evince che la variabile casuale X ha come dominio di variabilità l'insieme {-1;1;3;5} e la sua distribuzione di probabilità è quella riportata i **Tabella 1**.

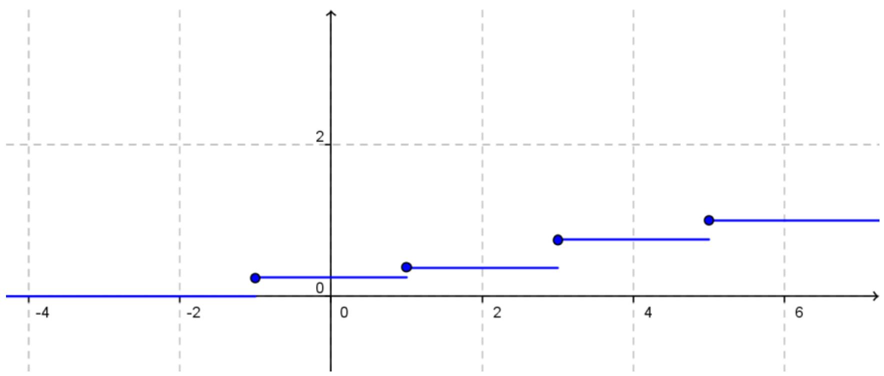

Tabella 1

X	p_i
-1	0,25
1	0,125
3	0,375
5	0,25

A beneficio del lettore riportiamo la rappresentazione grafica della funzione di ripartizione limitatamente all'intervallo [-5;10].

Utilizzando l'applicazione GeoGebra sono stati implementati i seguenti comandi: Curva[t,0,t,-5,-1], Curva[t,0.25,t,-1,1], Curva[t,0.375,t,1,3], Curva[t,0.75,t,3,5], Curva[t,1,t,5,10]

2) Poiché la variabile casuale X non assume il valore 0, si ha P(X=0). Per

quanto concerne il valore della P(X≤2), dalla Tabella 1 si evince che i valori minori o uguali a 2 che possono essere assunti dalla v.c. X sono -1 e 1, per cui

$$P(X \le 2) = P((X=-1) \vee (X=1)) = P(X=-1) + P(X=1) = 0,25 + 0,125 = 0,375$$

$$P(X > 3) = P(X=5) = 0,25$$

3) $P(1 \le X \le 5) = P(X=1) + P(X=3) + P(X=5) = 0,75$

4) Ricordiamo che il valor modale, sinteticamente **moda**, è il valore argomentale x_i cui corrisponde il valore più alto della probabilità. Dalla distribuzione di probabilità si evince che **moda=3**.

Mediana

La mediana è il valore x_i che gode della seguente proprietà

$F(x_i) \le \frac{1}{2}$ e $F(x_{i+1}) > \frac{1}{2}$.

Confrontando la colonna delle probabilità cumulate in **Tabella 2** si evince che mediana=1. Infatti F(1)=0,375<0,5 e F(3)=0,75>0,5.

Tabella 2

X	Pi	p_cumulate
-1	0,25	0,25
1	0,125	0,375
3	0,375	0,75
5	0,25	1

5) Il valore medio di una v.c. che assume i $x_1, x_2, ..., x_n$, rispettivamente con probabilità $p_1, p_2, ..., p_n$, è $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$. Pertanto, nel caso in esame si ha

$$M(X) = -1 \cdot 0,25 + 1 \cdot 0,125 + 3 \cdot 0,375 + 5 \cdot 0,25 = 2,25$$

6) Per il calcolo della varianza utilizziamo la nota relazione:

$$Var(X) = M(X^2) - (M(X))^2 \qquad (*)$$

Tabella 3

X	p_i	$x_i p_i$	X^2	$x_i^2 p_i$
-1	0,25	-0,25	1	0,25
1	0,125	0,125	1	0,125
3	0,375	1,125	9	3,375
5	0,25	1,25	25	6,25
		2,25		10
		M(X)		M(X²)

Naturalmente occorre determinare prima il valore medio della variabile casuale X^2. In **Tabella 3**, nelle colonne 4° e 5° sono riportati i calcoli necessari per il valore medio di X^2, dunque $M(X^2) = 10$ e quindi

$$Var(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 10 - 2,25^2 = 4,9375$$

7) Per il calcolo dei valori richiesti della variabile Y=25-3X è necessario determinare i valori y_i che detta variabile può assumere. Ricordiamo che per definizione risulta

a. $y_i = 25 - 3x_i$

b. $P(Y = y_i) = P(X = x_i)$

Tuttavia non è necessario eseguire esplicitamente i calcoli per determinare i valori y_i , giacché dalla teoria è noto che

$$M(Y) = M(25 - 3X) = 25 - 3 \cdot M(X) = 25 - 3 \cdot 2,25 = 18,25$$

Per quanto concerne il calcolo della varianza di Y, ricordiamo inoltre che, sempre dalla teoria, se Y=*a*+*b*X, con *a* e *b* costanti, allora

$$Var(Y) = Var(a + bX) = b^2 \cdot Var(X)$$

Dunque si ha:

$$Var(Y) = 9 \cdot Var(X) = 9 \cdot 4,9375 = 44,4375$$

In **Tabella 4** sono stati predisposti, nelle ultime quattro colonne, i valori necessari per calcolare Var(Y) utilizzando ancora la relazione (*).

Come verifica della stessa e delle elaborazioni eseguite notiamo che

$$Var(Y) = M(Y^2) - (M(Y))^2 = 377,5 - 18,25^2 = 377,5 - 333,0625 = 44,4375$$

Tabella 4

X	Pi	$x_i p_i$	X^2	$x_i^2 p_i$	$y_i=25-3x_i$	$y_i p_i$	Y^2	$y_i^2 p_i$
-1	0,25	-0,25	1	0,25	28	7	784	196
1	0,125	0,125	1	0,125	22	2,75	484	60,5
3	0,375	1,125	9	3,375	16	6	256	96
5	0,25	1,25	25	6,25	10	2,5	100	25
		2,25		10		18,25		377,5
		M(X)		M(X^2)		M(Y)		M(Y^2)

8) Dal confronto della 6° colonna della Tabella 4 si evince che i valori assunti dalla v.c. Y sono gli elementi dell'insieme {10;16;22;28}, per cui si ha:

$$P(Y < 25) = P(Y = 10) + P(Y = 16) + P(Y = 22) = 0,25 + 0,375 + 0,125 = 0,75$$