

Premessa

Abbiamo già visto la simulazione del lancio di dadi con *excel*

Vedi: http://www.matematicamente.it/statistica/prob_simu/index.htm

Ci proponiamo di ottenere risultati “analoghi” usando *DERIVE*.

Il concetto di probabilità “frequentista” è basata sulla definizione di frequenza relativa di un evento.

Si definisce **frequenza relativa** di un evento in n prove effettuate nelle stesse condizioni, il rapporto fra il numero v delle prove nelle quali l’evento si è verificato e il numero n delle prove effettuate:

$$f = \frac{v}{n} \quad \text{con} \quad 0 \leq f \leq 1$$

se $f=0$ l’evento non si è mai verificato in quelle n prove;

se $f=1$ ($v=n$) l’evento si è sempre verificato in quelle n prove.

Nella nostra simulazione vogliamo verificare la

Legge empirica del caso

In una serie di prove, ripetute un gran numero di volte, eseguite tutte nelle stesse condizioni, la frequenza “tende” ad assumere valori prossimi alla probabilità dell’evento e l’approssimazione è tanto maggiore quanto più numerose sono le prove eseguite.

La legge empirica del caso permette di formulare la seguente

definizione frequentista di probabilità per eventi ripetibili:

La probabilità di un evento è la frequenza relativa in un numero “elevato” di prove.

Generalmente non si può dire quante prove siano necessarie; il numero delle prove dipende dal fenomeno in esame.

La simulazione con DERIVE

Marcello Pedone

www.matematicamente.it

Lancio di un dado

Per ottenere un vettore in cui sono "simulati" 100 lanci di un dado; basta scrivere il comando:

```
VECTOR(RANDOM(6) + 1, n, 1, 100)
```

La funzione: **RANDOM(n)** richiama il generatore di numeri pseudocasuali. I numeri casuali vengono ricavati dalla variabile di stato per i numeri casuali s , che viene aggiornata mediante la regola $2654435721 \cdot s + 1 \pmod{2^{32}}$ ogni volta che viene generato un numero casuale.

RANDOM(n) restituisce un intero casuale nell'intervallo $[0, n)$. Con **RANDOM(6)**, viene restituito uno dei 6 numeri interi equiprobabili dell'insieme $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

*Siccome nel lancio di un dado gli eventi possibili sono $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, si deve calcolare **RANDOM(6)+1**.*

*La sintassi della funzione **VECTOR** è: **VECTOR(espressione, variabile, valore iniziale, valore finale)**.*

La funzione :

```
VECTOR(RANDOM(6) + 1, n, 1, 100)
```

permette di ottenere un vettore in cui sono simulati 100 lanci di un dado. Premendo "=" si ottiene il vettore di 100 elementi, che viene di seguito riportato

```
[3, 4, 2, 4, 6, 6, 4, 6, 6, 4, 6, 3, 5, 4, 6, 1, 6, 5, 2, 1, 4, 1, 5, 6, 3, 2, 2, 6, 3, 1, 3, 4, 4, 2, 3, 2, 3, 4, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 3, 3, 1, 3, 4, 3, 2, 3, 4, 2, 4, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 4, 6, 1, 1, 1, 3, 4, 4, 4, 3, 4, 6, 1, 3, 1, 1, 5, 6, 6, 1, 1, 6, 1, 5, 6, 2, 2, 3, 2, 6, 4, 6, 2, 5, 6, 1, 1, 3, 2]
```

per contare quante volte compare il numero 1, il numero 2, ..., il numero 6, si può scrivere:

```
VECTOR(DIMENSION(SELECT(ELEMENT(VECTOR(RANDOM(6) + 1, n, 1, 100), i) = j, i, 1, DIMENSION(VECTOR(RANDOM(6) + 1, n, 1, 100)))), j, 1, 6)
```

*La funzione **ELEMENT(v, n)** restituisce l'elemento n -esimo del vettore v .*

*Ad esempio: **ELEMENT**([a, b, c, d, e, f], 2), restituisce b .*

*La funzione **SELECT** trova quegli elementi del vettore che soddisfano ad un certo criterio. **SELECT(u, k, v)** essa si semplifica in un vettore costituito dagli elementi k di v , per i quali $u(k)$ è vera. Ad esempio: **SELECT(PRIME(k), k, [3, 5, 7, 9, 11])**, si semplifica in $[3, 5, 7, 11]$.*

La dimensione di un vettore è il numero di elementi del vettore stesso.

*Con la funzione **DIMENSION(vettore)** calcoliamo la dimensione di un vettore.*

*Esempio: **DIM**([[a, b, c], [1, 2, 3]]) si semplifica in 2 perché la matrice ha 2 righe.*

Per ottenere la probabilità bisogna dividere i numeri precedentemente ottenuti per il numero totale degli eventi (n), in questo caso 100.

```
VECTOR( ( DIMENSION(SELECT(ELEMENT(VECTOR(RANDOM(6) + 1, n, 1, 100), i) = j, i, 1, DIMENSION(VECTOR(RANDOM(6) + 1, n, 1, 100)))) , j, 1, 6 ) / 100 )
```

La simulazione con DERIVE
Marcello Pedone
www.matematicamente.it

si ottiene: [0.18, 0.27, 0.2, 0.2, 0.16, 0.19]

1	0.18
2	0.27
3	0.2
4	0.2
5	0.16
6	0.19

Ripetendo l'esperimento con n=200 otteniamo:

[0.17, 0.215, 0.165, 0.17, 0.155, 0.155]

1	0.17
2	0.215
3	0.165
4	0.17
5	0.155
6	0.155

Ripetendo l'esperimento con n=500 otteniamo:

[0.142, 0.178, 0.194, 0.172, 0.19, 0.166]

1	0.142
2	0.178
3	0.194
4	0.172
5	0.19
6	0.166

Ripetendo l'esperimento con n=1000 otteniamo:

[0.182, 0.162, 0.167, 0.159, 0.183, 0.177]

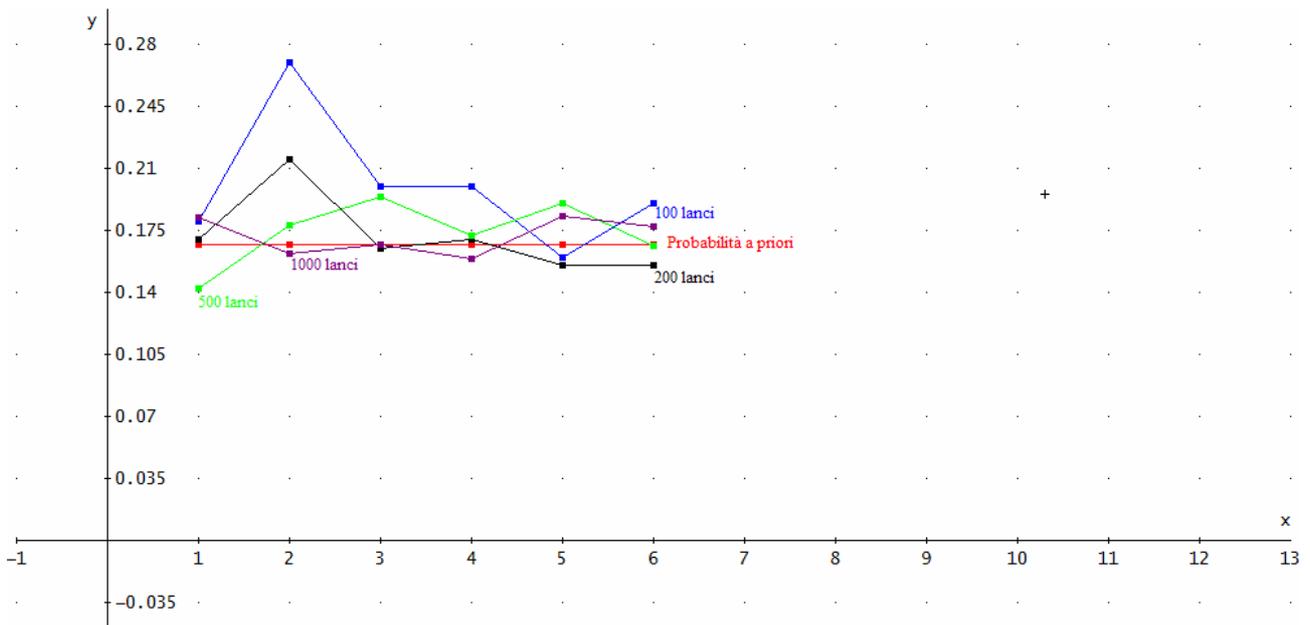
1	0.182
2	0.162
3	0.167
4	0.159
5	0.183
6	0.177

La simulazione con DERIVE

Marcello Pedone

www.matematicamente.it

Grafico dei risultati ottenuti nel lancio di un dado.



Legge empirica del caso

In una serie di prove, ripetute un gran numero di volte, eseguite tutte nelle stesse condizioni, la frequenza “tende” ad assumere valori prossimi alla probabilità dell’evento e l’approssimazione è tanto maggiore quanto più numerose sono le prove eseguite. CVV

Lancio di due dadi

Per ottenere un vettore in cui sono simulati 100 lanci di due dadi; basta scrivere il comando:

```
VECTOR(RANDOM(6) + RANDOM(6) + 2, n, 1, 100)
```

Nel lancio di due dadi gli eventi possibili sono { 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}, quindi si deve calcolare $RANDOM(6)+RANDOM(6)+2$

La funzione :

```
VECTOR(RANDOM(6) + RANDOM(6) + 2, n, 1, 100)
```

permette di ottenere un vettore in cui sono simulati 100 lanci di due dadi. Premendo “=” si ottiene il vettore di 100 elementi, che viene di seguito riportato

```
[7, 6, 12, 10, 10, 9, 9, 7, 11, 3, 5, 11, 5, 8, 4, 7, 6, 5, 7, 11, 11, 11, 6, 4, 7, 5, 6, 5, 3, 5, 5, 7, 2, 7, 8, 7, 7, 4, 6, 12, 2, 7, 11, 4, 5, 10, 8, 11, 2, 5, 9, 8, 7, 11, 8, 8, 5, 7, 10, 10, 6, 6, 5, 7, 8, 3, 12, 12, 8, 8, 11, 6, 10, 10, 10, 9, 7, 5, 11, 8, 4, 9, 7, 5, 5, 8, 7, 7, 5, 7, 6, 6, 6, 8, 8, 11, 3, 5, 5, 11]
```

per contare quante volte compare la somma “delle facce” dei due dadi è il numero 2, il numero 3, ..., il numero 12; si può scrivere:

La simulazione con DERIVE

Marcello Pedone

www.matematicamente.it

```
VECTOR(DIMENSION(SELECT(ELEMENT(VECTOR(RANDOM(6) + RANDOM(6) + 2, n, 1, 100), i) = j, i, 1, 1, DIMENSION(VECTOR(RANDOM(6) + RANDOM(6) + 2, n, 1, 100))), j, 2, 12)
```

Per ottenere la probabilità bisogna dividere i numeri precedentemente ottenuti per il numero totale degli eventi (n), in questo caso 100.

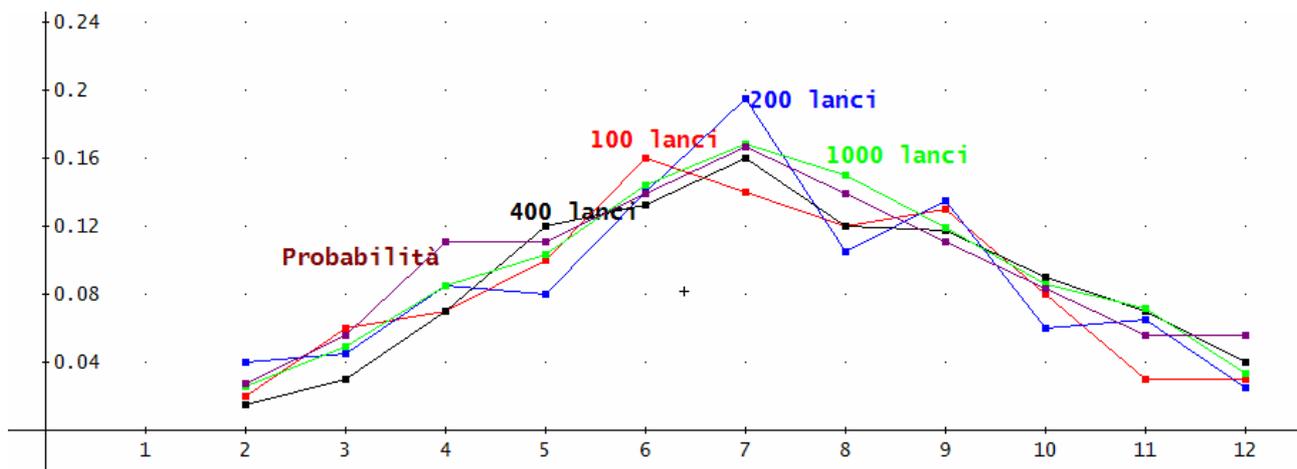
```
VECTOR( ( DIMENSION(SELECT(ELEMENT(VECTOR(RANDOM(6) + RANDOM(6) + 2, n, 1, 100), i) = j, i, 1, DIMENSION(VECTOR(RANDOM(6) + RANDOM(6) + 2, n, 1, 100))), j, 2, 12) ) / 100
```

Si ottiene:

[0.02, 0.06, 0.07, 0.1, 0.16, 0.14, 0.12, 0.13, 0.08, 0.03, 0.03]

2	0.02
3	0.06
4	0.07
5	0.1
6	0.16
7	0.14
8	0.12
9	0.13
10	0.08
11	0.03
12	0.03

Ripetendo l'esperimento effettuando 200,400,1000 lanci si ottiene il grafico seguente:



Legge empirica del caso

In una serie di prove, ripetute un gran numero di volte, eseguite tutte nelle stesse condizioni, la frequenza “tende” ad assumere valori prossimi alla probabilità dell’evento e l’approssimazione è tanto maggiore quanto più numerose sono le prove eseguite.

CVV

P.S. Il computer può impiegare alcuni minuti per il calcolo con n=1000.

La simulazione con DERIVE

Marcello Pedone

www.matematicamente.it

Rappresentazione grafica dei risultati ottenuti.

Con la funzione :

```
VECTOR [ VECTOR(x, x, 1, 6),  
VECTOR [  $\frac{\text{DIM}(\text{SELECT}(\text{ELEMENT}(\text{VECTOR}(\text{RANDOM}(6) + 1, n, 1, 100), i) = j, i, 1, \text{DIM}(\text{VECTOR}(\text{RANDOM}(6) + 1, n, 1, 100) \sim$   
~  
~  
)))  
——, j, 1, 6] ]
```

si ottiene (per esempio):

```
[ 1 2 3 4 5 6 ]  
[ 0.13 0.22 0.29 0.13 0.15 0.15 ]
```

Bisogna costruire la **Matrice trasposta** cioè la matrice risultante dallo scambio tra le righe e le colonne. La trasposizione di uno scalare (o di un vettore di scalari) restituisce l'argomento originale.

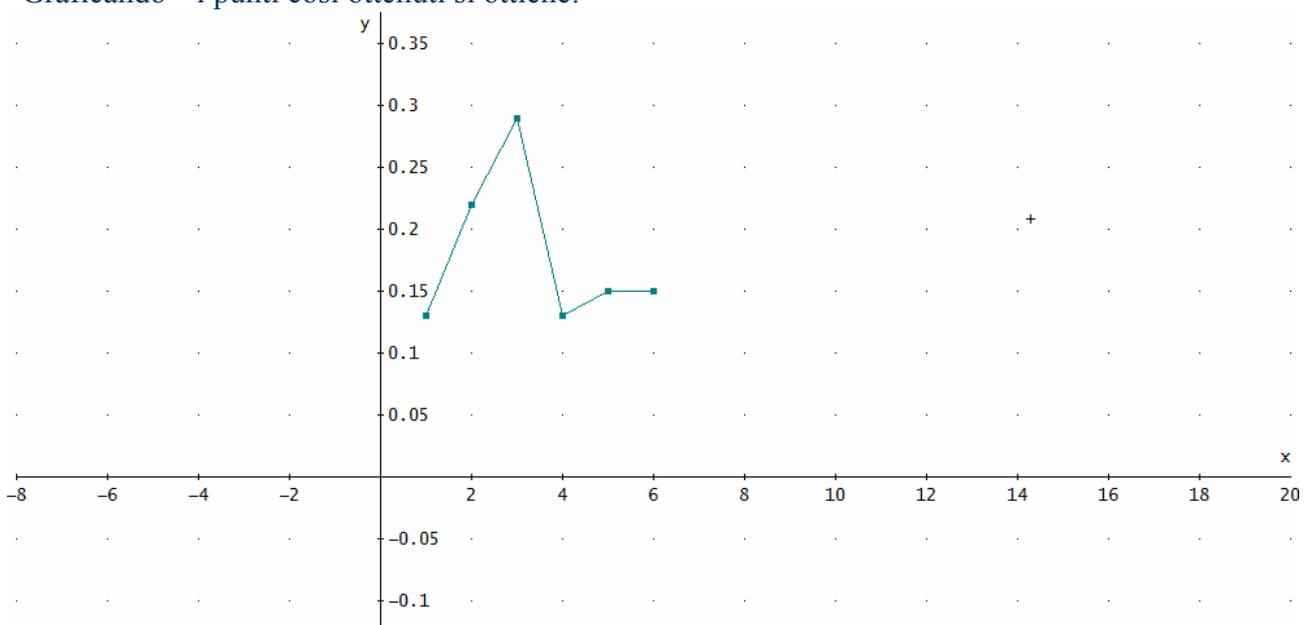
Si deve usare l'operatore postfisso ` (accento grave) per calcolare la trasposta di una matrice. Nel nostro caso:

```
[ 1 2 3 4 5 6 ]  
[ 0.13 0.22 0.29 0.13 0.15 0.15 ]`
```

si ottiene:

```
[ 1 0.13 ]  
[ 2 0.22 ]  
[ 3 0.29 ]  
[ 4 0.13 ]  
[ 5 0.15 ]  
[ 6 0.15 ]
```

“Graficando” i punti così ottenuti si ottiene:



Per rappresentare la linea continua bisogna fare le scelte rappresentate nella figura seguente:

