Geometria analitica

Iperbole e retta

Problema[1]

"Trovare l'equazione dell' iperbole, riferita agli assi e al centro, tangente alla retta t:4x - y - 3 = 0 nel punto A(1;1)"

* * * * * * * * * * * * * * * * *

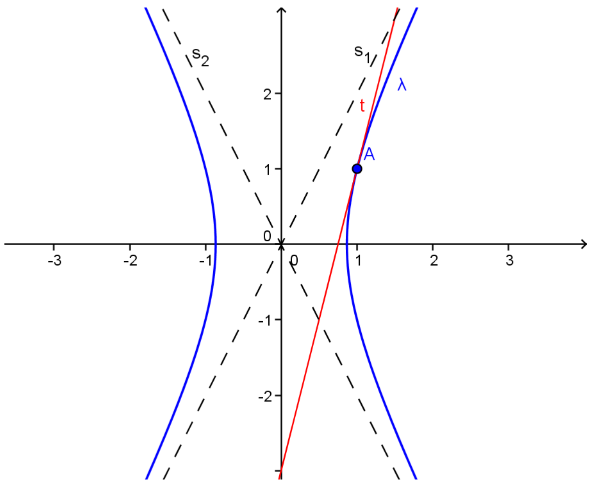
Premessa alla soluzione

Nel testo del problema non si precisa se l'iperbole da cercare debba avere i fuochi sull'asse delle ascisse o su quello delle ordinate. In un primo momento supponiamo che i fuochi giacciano sull'asse x.

Soluzione

L'equazione dell'iperbole riferita ai propri assi avente i fuochi sull'asse delle ascisse ha la seguente forma

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$



Per determinare i valori dei parametri a, b, occorrono due condizioni indipendenti. Come condizioni imponiamo:

1) che l'equazione dell'iperbole sia soddisfatta dalle coordinate del punto A(1;1); infatti, la curva deve essere tangente alla retta t:4x - y - 3 = 0 proprio in quel punto, dunque vi deve passare.
2) Impostando il sistema formato dall'equazione della retta tangente *t* e da quella dell'iperbole, l'equazione risolvente di detto sistema, che è di secondo grado, dovrà avere il discriminante nullo (Δ=0) perché il punto di tangenza A tra la retta e l'iperbole rappresenta in realtà due punti sovrapposti e l'ascissa di tale punto (o l'ordinata) coincide con il valore comune delle due radici dell'equazione risolvente.

Ciò premesso ricaviamo del due condizioni.

Appartenenza del punto A all'iperbole: $\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1$ (1)

Sistema di equazioni $\begin{cases}4x-y-3=0\\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}y=4x-3\\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{(4x-3)^2}{b^2}=1\end{cases}$ (2)

Dalla (1) si ha $\frac{1}{b^2}=\frac{1-a^2}{a^2}$ e sostituendo nell'equazione di secondo grado del sistema (2), dopo alcune elaborazioni, si perviene alla seguente equazione risolvente:

$$\left(16a^2-15\right)x^2+24\left(1-a^2\right)x+8a^2-9=0 \quad (3)$$

Ponendo la condizione

$$\frac{\Delta}{4}=\left[12\left(1-a^2\right)\right]^2-\left(16a^2-15\right)\left(8a^2-9\right)=0$$

si ricava $a^2=\frac{3}{4}$, cui corrisponde $b^2=3$.

---

[1] Quesito richiesto dall'utente del sito piergz1…

L'equazione dell'iperbole cercata è perciò la seguente $\lambda: \frac{4x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 1.$

Nella figura riportata sono indicate l'iperbole, la retta *t* tangente, il punto di contatto A e gli asintoti; questi ultimi hanno equazioni

$s_1 : y = 2x$, $s_2 : y = -2x$

Osservazione

Nella premessa abbiamo sottolineato che nel testo non era precisato la caratteristica dell'iperbole relativamente alla posizione dei suoi fuochi. Ebbene, se si risolve il problema cercando l'iperbole tra quelle aventi i fuochi sull'asse delle ordinate, partendo cioè dall'equazione della curva $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$, dopo aver sviluppato analogo percorso risolutivo si conclude che non esiste alcuna iperbole di detto tipo che possa essere tangente alla retta t:4x - y - 3 = 0 nel punto A(1;1).

Si consiglia il lettore di sviluppare le elaborazioni necessarie come utile esercizio; se lo farà riscontrerà che con la condizione Δ=0 perverrà all'equazione $\left(4a^2 + 3\right)^2 = 0$ dalla quale si ricava $a^2 = -\frac{3}{4}$, valore che non è accettabile.

Concludiamo che esiste una sola iperbole che risolve i problema ed è quella indicata.