Geometria analitica

(iperbole equilatera, rette tangenti, trapezio rettangolo e triangolo equilatero)

Problema

a) In un riferimento cartesiano ortogonale xOy si consideri l'iperbole equilatera λ_1 riferita ai propri asintoti tangente alla retta t:y=-2x+4. Si determini l'equazione dell'iperbole e la si rappresenti insieme alla retta tangente, indicando il punto di contatto.

b) Per un punto P del primo quadrante appartenente all'iperbole si tracci la retta tangente all'iperbole e siano Q il punto in cui tale tangente interseca l'asse delle ascisse. Sia R il punto sull'asse y avente la stessa ordinata di P. Dimostrare che il trapezio ORPQ al variare di P sull'iperbole ha area costante.

c) Determinare la posizione del punto P in modo che il triangolo OAP sia equilatero. Indicare le coordinate dei vertici del triangolo ottenuto e precisare dello stesso i valori del perimetro e dell'area.

Elaborazioni

a) L'iperbole riferita ai propri asintoti ha equazione cartesiana xy=k, con k costante reale da determinare imponendo la condizione che la curva sia tangente alla retta t:y=-2x+4. Impostiamo dunque il sistema co le equazioni delle due curve e poniamo uguale a zero il discriminante della corrispondente equazione risolvente.

a.1) $\begin{cases} y=-2x+4 \\ xy=k \end{cases}$ L'equazione risolvente è $2x^2-4x+k=0$. La condizione da imporre per la tangenza è $\frac{\Delta}{4}=4-2k=0$, da cui si ricava $k=2$

a.2) L'equazione dell'iperbole equilatera è $\lambda_1 : xy=2$. Il punto di contatto T ha coordinate (1;2) (Figura 1).

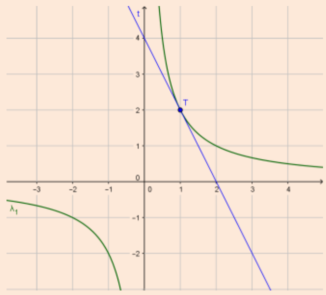

Figura 1

b) Il generico punto P del primo quadrante dell'iperbole ha coordinate $P\left(\alpha;\frac{2}{\alpha}\right)$, con $\alpha>0$.

b.1)L'equazione della retta tangente in P all'iperbole può essere ottenuta applicando le formule di sdoppiamento (Nota_1 a margine). L'equazione cartesiana è

$t_P : \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\alpha}x+\alpha y\right)=2$, da cui

$t_P : \frac{2}{\alpha}x+\alpha y=4$.

La retta tangente t_P incontra l'asse delle ascisse nel punto $Q(2\alpha;0)$.

Il punto R è $R(0;2/\alpha)$.

L'area del trapezio ORPQ vale

$$Area(ORPQ)=\frac{1}{2}\left(\overline{OQ}+\overline{RP}\right)\cdot\overline{OR}=$$

$$\frac{1}{2}\left(x_Q+x_P\right)\cdot y_R=\frac{1}{2}(2\alpha+\alpha)\cdot\frac{2}{\alpha}=3$$

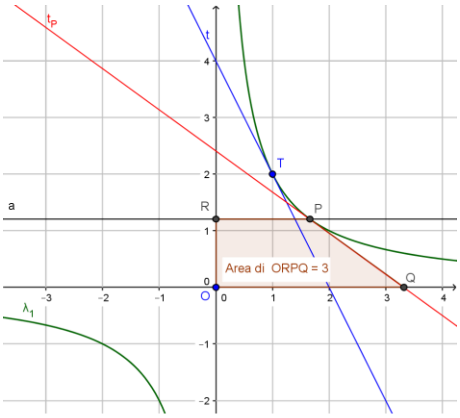

Figura 2

Come si vede l'area del trapezio è indipendente dal parametro α, cioè è indipendente dalla scelta del punto P sul ramo della curva, e per la curva

Nota_1

Formule di sdoppiamento

Ricordiamo che si può ottenere l'equazione della retta tangente ad una conica nel suo punto $P_0(x_0;y_0)$ sostituendo nell'equazione della curva:

x^2 con $x_0 \cdot x$

y^2 con $y_0 \cdot y$

x con $(x_0 + x)/2$

y con $(y_0 + y)/2$

xy con $(y_0x + x_0y)/2$

considerata vale 3 (Figura 2).

c) Determiniamo le misure dei lati OP, PQ del triangolo OPQ.

$$\overline{OP}=\sqrt{\alpha^2+\frac{4}{\alpha^2}}\;;\;\overline{PQ}=\sqrt{(2\alpha-\alpha)^2+\frac{4}{\alpha^2}}=\sqrt{\alpha^2+\frac{4}{\alpha^2}}$$

Come si vede, per ogni $\alpha>0$ i due lati OP, PQ hanno la stessa misura, quindi il triangolo è isoscele sulla base OQ. Affinché sia equilatero imponiamo che risulti $\overline{OP}=\overline{OQ}$, quindi che α sia soluzione dell'equazione

$\sqrt{\alpha^2+\frac{4}{\alpha^2}}=2\alpha$, da cui quadrando si ricava $3\alpha^2=\frac{4}{\alpha^2}\rightarrow$

$\alpha=\sqrt[4]{\frac{4}{3}}\simeq 1{,}074569\ldots$.

Per questo valore di α si hanno i vertici del triangolo O(0;0), $P\left(\sqrt[4]{\frac{4}{3}};2\cdot\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\right)$, $Q\left(2\cdot\sqrt[4]{\frac{4}{3}};0\right)$.

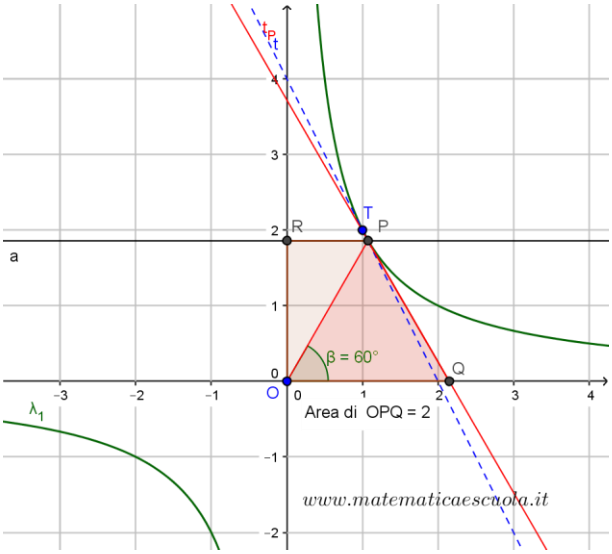

Figura 3

Il perimetro del triangolo vale $Per(OPQ)=6\alpha=6\sqrt[4]{\frac{4}{3}}$, mentre la misura dell'area è

$$Area(OPQ)=\frac{\overline{OQ}^2}{4}\cdot\sqrt{3}=\frac{1}{4}\cdot\left(2\cdot\sqrt[4]{\frac{4}{3}}\right)^2\cdot\sqrt{3}=\frac{1}{4}\cdot 4\sqrt{\frac{4}{3}}\cdot\sqrt{3}=2$$

Nota_2

Si ricordi che l'area di un triangolo equilatero il cui lato misura l vale

$$Area=\frac{l^2}{4}\sqrt{3}$$