Sull'iperbole

Si consideri nel piano cartesiano xOy la seguente equazione algebrica

$$kx^2+\left(k-\frac{5}{4}\right)y^2=-k$$

Quesiti

1) Stabilire per quali valori del parametro k l'equazione rappresenta un fascio di iperboli.
2) Riconosciuto che k=1 è un valore ammissibile, scrivere l'equazione dell'iperbole γ corrispondente, trovarne vertici, fuochi, eccentricità ed equazioni degli asintoti. Rappresentare la curva con i suoi elementi caratteristici.
3) Sia A il punto dell'iperbole γ avente ascissa -3/4 e ordinata positiva. Scrivere l'equazione della retta t_A tangente a γ in A e sia P il punto di detta tangente avente ascissa 2.
4) Scrivere l'equazione della seconda retta tangente all'iperbole γ condotta da P e determinare il corrispondente punto B di contatto. Calcolare l'area del triangolo ABP.
5) Realizzare una figura riepilogativa contenente tutti gli elementi geometrici trovati.

Risposte

1) $0<k<\frac{5}{4}$

2) Con k=1 si ha $\gamma:4x^2-y^2=-4$; $V_1(0;2)$, $V_2(0;-2)$; $F_1\left(0;\sqrt{5}\right)$, $F_2\left(0;-\sqrt{5}\right)$; $e=\frac{\sqrt{5}}{2}$

   $s_1:y=2x$, $s_2:y=-2x$

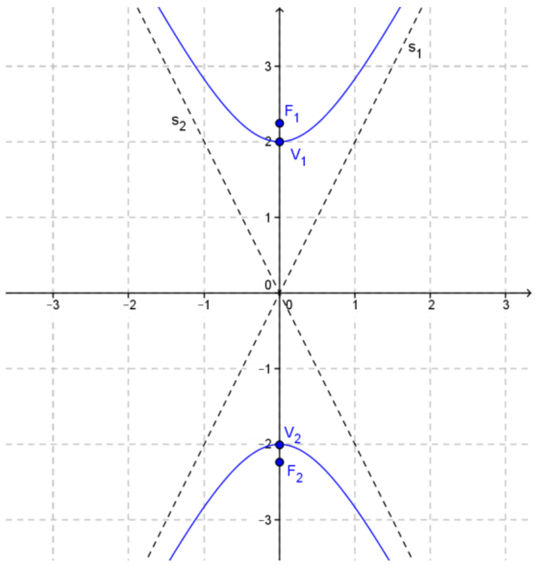
3) $A\left(-\frac{3}{4};\frac{5}{2}\right)$, $t_A:6x+5y-8=0$; $P\left(2;-\frac{4}{5}\right)$

4) $t_B:14x-25y-48=0$; $B\left(-\frac{7}{24};-\frac{25}{12}\right)$. Area(ABP)=1331/240

Soluzione

1) Per ottenere curve non degeneri dall'equazione assegnata i valori del parametro k devono essere diversi da 0 e da 5/4. In particolare, per ottenere iperboli i coefficienti dei termini di secondo grado devono essere discordi e ciò si verifica per $0 < k < \frac{5}{4}$.

2) Con k=1 si ha l'iperbole $\gamma : x^2 - \frac{1}{4}y^2 = -1$, avente centro nell'origine degli assi coordinati, come asse trasverso l'asse delle ordinate, vertici $V_1(0;2)$, $V_2(0;-2)$, fuochi $F_1(0;\sqrt{5})$, $F_2(0;-\sqrt{5})$; l'eccentricità della curva è $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$. I due asintoti sono le rette $s_1 : y = 2x$, $s_2 : y = -2x$.



3) Risulta $A\left(-\frac{3}{4};\frac{5}{2}\right)$. Per l'equazione della retta tangente all'iperbole utilizziamo le formule di sdoppiamento. Più avanti, affrontando il successivo punto 4) applicheremo il metodo del fascio proprio di rette.

Ricordiamo che se $(x_0; y_0)$ sono le coordinate di un punto dell'iperbole, l'equazione della retta tangente alla curva in detto punto si ottiene sostituendo nell'equazione x^2 con x_0x ed y^2 con y_0y. Dunque l'equazione della tangente cercata è $t_A : 6x + 5y - 8 = 0$.

Il punto P sulla tangente ha ascissa x=2 , dunque risulta $P\left(2;-\frac{4}{5}\right)$.

4) Ricerca dell'equazione della seconda retta tangente all'iperbole condotta da P.

Strategia risolutiva

a) Scriviamo l'equazione del fascio proprio di rette di centro P utilizzando come parametro il coefficiente angolare m;
b) mettiamo a sistema l'equazione del fascio di rette con l'equazione dell'iperbole e individuiamo l'equazione risolvente del sistema;
c) imponiamo che l'equazione risolvente abbia radici coincidenti (Δ=0, condizione di tangenza) e da tale condizione si otterrà un'equazione nel parametro m; risolta l'equazione si otterranno come valori i coefficienti angolari delle due tangenti all'iperbole condotte da P (delle quali è già nota quella passante per A).

Equazione del fascio di centro P: $F : y + \frac{4}{5} = m(x-2)$

Sistema $\begin{cases} y+\frac{4}{5}=m(x-2) \\ \gamma: 4x^2-y^2=-4 \end{cases}$,

la cui equazione risolvente è

$$\left(4-m^2\right)x^2+2\left(2m^2+\frac{4}{5}m\right)x-4m^2-\frac{16}{5}m+\frac{84}{25}=0 \qquad (*)$$

Condizione di tangenza:

$\frac{\Delta}{4}=\left(2m^2+\frac{4}{5}m\right)^2-\left(4-m^2\right)\left(-4m^2-\frac{16}{5}m+\frac{84}{25}\right)=0$, che semplificata diventa

$5m^2+\frac{16}{5}m-\frac{84}{25}=0$, le cui radici sono $m_1=-\frac{6}{5}$, $m_2=\frac{14}{25}$.

Si riconosce che $m_1=-\frac{6}{5}$ rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente in A; pertanto la seconda retta tangente all'iperbole condotta da P, che avrà come punto di contatto B, è

$t_B: y+\frac{4}{5}=\frac{14}{25}(x-2)$, cioè $t_B: y=\frac{14}{25}x-\frac{48}{25}$

Coordinate del punto di contatto B

Il valore dell'ascissa di B si ottiene dall'equazione risolvente (*) dopo aver posto ivi $m=m_2=\frac{14}{25}$ ed è

$$x_B=-\frac{2\left(2m^2+\frac{4}{5}m\right)}{2\left(4-m^2\right)}=-\frac{2\cdot\left(\frac{14}{25}\right)^2+\frac{4}{5}\left(\frac{14}{25}\right)}{4-2\left(\frac{14}{25}\right)^2}=\ \ldots=-\frac{7}{24}$$

L'ordinata di B la ricaviamo sostituendo ad x il valore dell'ascissa dello stesso punto nell'equazione della corrispondente retta tangente. Si ha:

$y_B=\frac{14}{25}\left(-\frac{7}{24}\right)-\frac{48}{25}=\ \ldots=-\frac{25}{12}$. Dunque $B\left(-\frac{7}{24};-\frac{25}{12}\right)$.

Area del triangolo ABP

Utilizziamo la **formula del determinante del terzo ordine** avendo cura di riportare le coordinate dei **vertici** dalla prima alla terza riga scegliendo i punti **nel verso antiorario**. Si ha:

$$Area(ABP)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{5}{2} & 1 \\ -\frac{7}{24} & -\frac{25}{12} & 1 \\ 2 & -\frac{4}{5} & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{25}{12}+5+\frac{7}{30}\right)-\left(-\frac{25}{6}+\frac{3}{5}-\frac{35}{48}\right)\right]=$$

$$\ldots=\frac{1331}{240}\approx 5,5458$$

5) Segue la figura riepilogativa