Ellisse

Rette tangenti, rettangolo circoscritto, parallelogramma inscritto

Problema

1) Scrivere l'equazione dell'ellisse riferita ai suoi assi che passa per il punto A(1;2) e avente un vertice nel punto $V_1(3;0)$.
2) Scrivere l'equazione della retta s passante per il centro dell'ellisse e per A.
3) Determinare le equazioni delle rette t_1, t_2 tangenti all'ellisse e parallele alla retta s e le equazioni delle rette t_3, t_4 tangenti all'ellisse e perpendicolari a s. Determinare le coordinate dei punti di contatto tra l'ellisse e le rette t_1, t_2, t_3, t_4. Determinare l'area del quadrilatero avente per vertici i suddetti quattro punti di contatto.
4) Determinare perimetro ed area del quadrilatero individuato dalle rette t_1, t_2, t_3, t_4.
5) Realizzare una figura contenente tutti gli elementi geometrici elaborati.

Guida alla soluzione

1) L'equazione canonica dell'ellisse è $\gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Dalla conoscenza del vertice V_1 si deduce che a=3; per ricavare il valore di b imponiamo che l'equazione della curva sia soddisfatta dalle coordinate di A.

$\gamma:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{b^2}=1;\quad A\in\gamma\to\frac{1}{9}+\frac{4}{b^2}=1\to b^2=\frac{9}{2}$. Quindi $\gamma:\frac{x^2}{9}+\frac{2y^2}{9}=1$, da cui $\gamma:x^2+2y^2=9$.

2) Il centro dell'ellisse è l'origine degli assi; la retta s ha equazione y=2x.
3) **Ricerca delle rette tangenti all'ellisse parallele alla retta s**

Le rette appartengono al fascio improprio $F_1: y=2x+k$. Per trovare i valori del parametro k per i quali si hanno le due rette tangenti si mette a sistema l'equazione del fascio e quella dell'ellisse, si trova l'equazione risolvente e si impone come condizione di tangenza che il discriminante di detta equazione sia nullo:Δ=0.

Coordinate dei punti di contatto di t_1, t_2 con l'ellisse.

$T_1\left(-\frac{4}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\quad T_2\left(\frac{4}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Ricerca delle rette tangenti all'ellisse perpendicolari alla retta s

Le rette appartengono al fascio improprio $F_2: y=-\frac{1}{2}x+q$.

.... $t_3: y=-\frac{1}{2}x+\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $t_4: y=-\frac{1}{2}x-\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Coordinate dei punti di contatto di t_3, t_4 con l'ellisse.

$T_3\left(\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$, su t_3; $T_4\left(-\sqrt{3};-\sqrt{3}\right)$, su t_4.

Area del quadrilatero divertici T_1,T_2,T_3,T_4

$Area\left(T_1T_2T_3T_4\right)=5\sqrt{6}$.

4) Le quattro tangenti formano un rettangolo i cui vertici sono $Q_1\left(\frac{9\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{5};\frac{12\sqrt{3}-9\sqrt{2}}{10}\right)$, $Q_2\left(\frac{-9\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{5};\frac{12\sqrt{3}+9\sqrt{2}}{10}\right)$,....

$Area\left(Q_1Q_2Q_3Q_4\right)=\frac{54}{5}\sqrt{6}$

5) Segue la figura riepilogativa.