Ellisse

Rette tangenti, rettangolo circoscritto, parallelogramma inscritto

Problema

1) Scrivere l'equazione dell'ellisse riferita ai suoi assi che passa per il punto A(1;2) e avente un vertice nel punto $V_1(3;0)$.
2) Scrivere l'equazione della retta s passante per il centro dell'ellisse e per A.
3) Determinare le equazioni delle rette t_1, t_2 tangenti all'ellisse e parallele alla retta s e le equazioni delle rette t_3, t_4 tangenti all'ellisse e perpendicolari a s. Determinare le coordinate dei punti di contatto tra l'ellisse e le rette t_1, t_2, t_3, t_4. Determinare l'area del quadrilatero avente per vertici i suddetti quattro punti di contatto.
4) Determinare perimetro ed area del quadrilatero individuato dalle rette t_1, t_2, t_3, t_4.
5) Realizzare una figura contenente tutti gli elementi geometrici elaborati.

Soluzione

1) L'equazione canonica dell'ellisse è $\gamma: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Dalla conoscenza del vertice V_1 si deduce che *a*=3; per ricavare il valore di b imponiamo che l'equazione della curva sia soddisfatta dalle coordinate di A.

$\gamma: \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{b^2}=1$; $\quad A\in\gamma \to \frac{1}{9}+\frac{4}{b^2}=1 \to b^2=\frac{9}{2}$. Quindi $\gamma: \frac{x^2}{9}+\frac{2y^2}{9}=1$, da cui $\gamma: x^2+2y^2=9$.

2) Il centro dell'ellisse è l'origine degli assi; la retta s ha equazione y=2x.
3) **Ricerca delle rette tangenti all'ellisse parallele alla retta s**

Le rette appartengono al fascio improprio $F_1: y=2x+k$. Per trovare i valori del parametro k per i quali si hanno le due rette tangenti si mette a sistema l'equazione del fascio e quella dell'ellisse, si trova l'equazione risolvente e si impone come condizione di tangenza che il discriminante di detta equazione sia nullo:Δ=0.

$\begin{cases} F_1: y=2x+k \\ \gamma: x^2+2y^2=9 \end{cases} \to x^2+2(2x+k)^2=9 \to 9x^2+8kx+2k^2-9=0$ (equazione risolvente).

Condizione di tangenza: $(4k)^2-9(2k^2-9)=0 \to 2k^2=81 \to k=\pm\frac{9}{\sqrt{2}}$. Le due rette tangenti cercate sono $t_1: y=2x+\frac{9}{\sqrt{2}}$, $t_2: y=2x-\frac{9}{\sqrt{2}}$.

Coordinate dei punti di contatto di t_1, t_2 con l'ellisse.

Detto T_1 il punto di contatto della retta t_1, osserviamo che la sua ascissa si ottiene dall'equazione risolvente ponendovi $k=\frac{9}{\sqrt{2}}$ e risulta $x_{T_1}=-\frac{8k}{2\cdot 9}=-\frac{4}{9}\cdot\frac{9}{\sqrt{2}}=-\frac{4}{\sqrt{2}}$. Sostituendo il valore trovato nell'equazione della retta si ricava l'ordinata.

$y_{T_1} = -\frac{8}{\sqrt{2}} + \frac{9}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow T_1\left(-\frac{4}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Con procedimento analogo, operando con l'equazione della tangente t_2 si trovano le coordinate del corrispondente punto di contatto T_2; risulta $T_2\left(\frac{4}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Ricerca delle rette tangenti all'ellisse perpendicolari alla retta s

Le rette appartengono al fascio improprio $F_2 : y = -\frac{1}{2}x + q$. Per trovare i valori del parametro q corrispondenti alle due tangenti si mettono a sistema l'equazione del fascio e quella dell'ellisse, si trova l'equazione risolvente e si impone come condizione di tangenza che il discriminante di detta equazione sia nullo:Δ=0.

$\begin{cases} F_2 : y = -\frac{1}{2}x + q \\ \gamma : x^2 + 2y^2 = 9 \end{cases} \rightarrow 3x^2 - 4qx + 4q^2 - 18 = 0$ (equazione risolvente).

$\frac{\Delta}{4} = 0 \rightarrow 4q^2 - 12q^2 + 54 = 0 \rightarrow q = \pm\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Le due rette tangenti sono

$t_3 : y = -\frac{1}{2}x + \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $t_4 : y = -\frac{1}{2}x - \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Coordinate dei punti di contatto di t_3, t_4 con l'ellisse.

Il procedimento algebrico da seguire è identico a quello esposto per la ricerca dei punti di contatto T_1, T_2. Lasciamo il lavoro come utile esercizio al lettore e riportiamo direttamente i punti di contatto T_3, T_4 che si ottengono. $T_3\left(\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$, su t_3; $T_4\left(-\sqrt{3};-\sqrt{3}\right)$, su t_4.

Area del quadrilatero divertici T_1,T_2,T_3,T_4

Il quadrilatero in oggetto è un parallelogramma. Si può determinare la sua area come il doppio dell'area del triangolo di vertici T_1,T_2,T_3; quest'ultimo valore lo troviamo applicando la regola del determinante del terzo ordine.

$Area\left(T_1T_2T_3\right) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -\frac{4}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ \frac{4}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} = ... = \frac{5\sqrt{6}}{2}$, da cui $Area\left(T_1T_2T_3T_4\right) = 5\sqrt{6}$.

4) Le quattro tangenti formano un rettangolo i cui vertici sono $Q_1\left(\frac{9\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{5};\frac{12\sqrt{3}-9\sqrt{2}}{10}\right)$, $Q_2\left(\frac{-9\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{5};\frac{12\sqrt{3}+9\sqrt{2}}{10}\right)$, $Q_3\left(-\frac{9\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{5};\frac{9\sqrt{2}-12\sqrt{3}}{10}\right)$, $Q_4\left(\frac{9\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{5};-\frac{9\sqrt{2}+12\sqrt{3}}{10}\right)$.

Perimetro di $Q_1Q_2Q_3Q_4$ $\rightarrow$ $2p(Q_1Q_2Q_3Q_4) = \frac{6}{5}\left(3\sqrt{10} + 2\sqrt{15}\right)$

Area di $Q_1Q_2Q_3Q_4$ $\rightarrow$ $Area(Q_1Q_2Q_3Q_4) = \frac{54}{5}\sqrt{6}$

5) Segue la figura riepilogativa.