

Sull'Ellisse

Rette tangenti e calcolo di aree

Nel piano cartesiano xOy si consideri l'ellisse riferita ai propri assi avente equazione $E: x^2 + 4y^2 = 9$.
Risolvere i quesiti che seguono.

Q₁- Determinare le misure dei semiassi, le coordinate dei vertici e dei fuochi, la distanza focale ed il valore dell'eccentricità. Rappresentare l'ellisse.

Q₂- Considerato il punto $P\left(6; \frac{3}{2}\right)$, scrivere le equazioni delle rette tangenti condotte da P all'ellisse e determinare le coordinate dei punti di contatto A, B. Calcolare l'area del triangolo APB.

Q₃- Detto V_1 il vertice dell'ellisse avente ascissa positiva e t la retta tangente all'ellisse nello stesso punto, determinare l'area del quadrilatero delimitato dalle rette tangenti condotte da P, dalla retta t e dalla retta AB.

Q₄- Realizzare una figura contenente tutti gli elementi geometrici elaborati nel problema.

Soluzione

Q₁- Scriviamo l'equazione della curva in forma canonica in modo da riconoscere i parametri caratteristici.

$$E: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{\frac{9}{4}} = 1 \quad (1)$$

L'equazione (1) è della forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, alla quale solitamente si riferiscono le formule che permettono di ricavare gli elementi caratteristici della curva.

Le misure dei semiassi sono: $a = 3$, $b = \frac{3}{2}$.

I vertici sono $V_1(3;0)$, $V_2(-3;0)$, $V_3\left(0; \frac{3}{2}\right)$,

$$V_4\left(0; -\frac{3}{2}\right)$$

Coordinate dei fuochi. Si osservi che

...

Eccentricità

L'eccentricità e dell'ellisse è il rapporto tra la semidistanza focale ed il semiasse maggiore. Dunque:

...

La curva è rappresentata in **Figura 1**.

Q₂- Osserviamo subito che il punto P è esterno all'ellisse ed ha ordinata uguale a quella del vertice V_3 , quindi una delle due tangenti condotte da P alla curva è parallela all'asse delle ascisse; ...

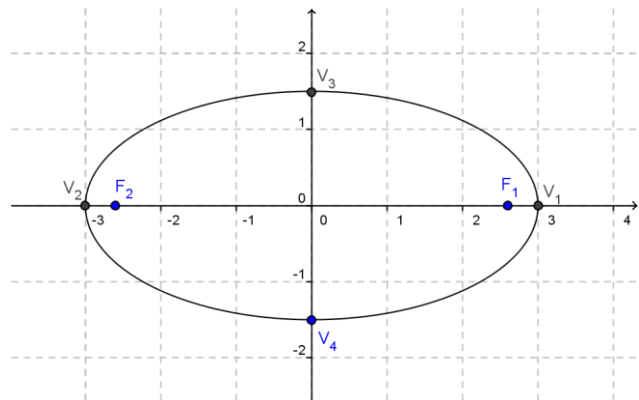


Figura 1

Per ricavare la seconda retta tangente si deve scrivere l'equazione del fascio proprio di rette di centro P, impostare il sistema tra quest'equazione e quella dell'ellisse, ricavare l'equazione risolvente, che è di secondo grado, ed imporre che questa abbia le radici coincidenti;...

Punti di contatto delle tangenti condotte da P all'ellisse

...

Area del triangolo APB

...

Il valore dell'area del triangolo è: ... $\frac{36}{5}$

Q₃- La retta tangente all'ellisse in V_1 ha equazione $x=3$ e interseca la tangente t_1 nel punto $H(3;3/2)$ e la tangente t_2 nel punto $C(3;-1/2)$. Osserviamo che il quadrilatero ABCH, di cui si richiede l'area, è uno dei due poligoni in cui la retta t divide il triangolo APB. ...

Q₄-La rappresentazione grafica di tutti gli elementi geometrici elaborati è in Figura 2.