Sull'Ellisse

Rette tangenti e calcolo di aree

Nel piano cartesiano xOy si consideri l'ellisse riferita ai propri assi avente equazione $E: x^2+4y^2=9$. Risolvere i quesiti che seguono.

Q_1- Determinare le misure dei semiassi, le coordinate dei vertici e dei fuochi, la distanza focale ed il valore dell'eccentricità. Rappresentare l'ellisse.

Q_2- Considerato il punto $P\left(6;\frac{3}{2}\right)$, scrivere le equazioni delle rette tangenti condotte da P all'ellisse e determinare le coordinate dei punti di contatto A, B. Calcolare l'area del triangolo APB.

Q_3-Detto V_1 il vertice dell'ellisse avente ascissa positiva e t la retta tangente all'ellisse nello stesso punto, determinare l'area del quadrilatero delimitato dalle rette tangenti condotte da P, dalla retta t e dalla retta AB.

Q_4- Realizzare una figura contenente tutti gli elementi geometrici elaborati nel problema.

Soluzione

Q_1- Scriviamo l'equazione della curva in forma canonica in modo da riconoscere i parameri caratteristici.

$$E:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{\frac{9}{4}}=1 \qquad (1)$$

L'equazione (1) è della forma $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, alla quale solitamente si riferiscono le formule che permettono di ricavare gli elementi caratteristici della curva.

Le misure dei semiassi sono: $a=3,\ b=\frac{3}{2}$.

I vertici sono $V_1(3;0)$, $V_2(-3;0)$, $V_3\left(0;\frac{3}{2}\right)$, $V_4\left(0;-\frac{3}{2}\right)$

Coordinate dei fuochi. Si osservi che $c^2=a^2-b^2=\frac{27}{4}$, quindi $c=\frac{3}{2}\sqrt{3}$. I fuochi sono $F_1\left(\frac{3}{2}\sqrt{3};0\right)$, $F_2\left(-\frac{3}{2}\sqrt{3};0\right)$.

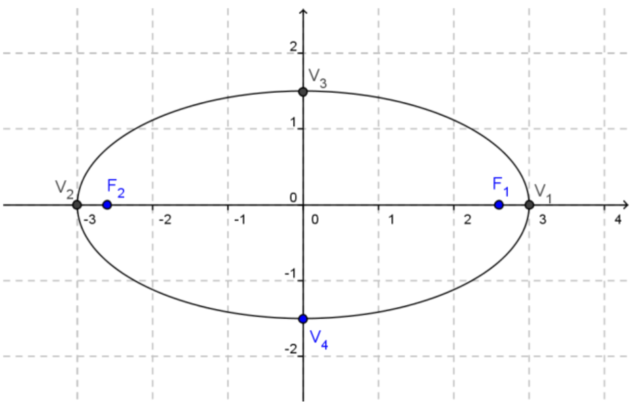

Figura 1

La distanza focale è la misura del segmento avente per estremi i due fuochi, quindi $\overline{F_1F_2}=2c=3\sqrt{3}$.

Eccentricità

L'eccentricità e dell'ellisse è il rapporto tra la semidistanza focale ed il semiasse maggiore. Dunque:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{3}{2}\sqrt{3}:3=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

La curva è rappresentata in **Figura 1**.

Q$_2$- Osserviamo subito che il punto P è esterno all'ellisse ed ha ordinata uguale a quella del vertice V_3, quindi una delle due tangenti condotte da P alla curva è parallela all'asse delle ascisse; indicata con t_1 detta retta la sua equazione è:

t_1:2y-3=0

Per ricavare la seconda retta tangente si deve scrivere l'equazione del fascio proprio di rette di centro P, impostare il sistema tra quest'equazione e quella dell'ellisse, ricavare l'equazione risolvente, che è di secondo grado, ed imporre che questa abbia le radici coincidenti; com'è noto, questa condizione si verifica se e solo se il discriminante dell'equazione è nullo: $\Delta=0$.

Equazione del fascio proprio di rette $\quad F: y-\frac{3}{2}=m(x-6)$

Sistema

$$\begin{cases} F: y-\frac{3}{2}=m(x-6) \\ E: x^2+4y^2=9 \end{cases} \text{, da cui } \begin{cases} y=m(x-6)+\frac{3}{2} \\ x^2+4\left(m(x-6)+\frac{3}{2}\right)^2=9 \end{cases}$$

Sviluppando i calcoli nell'equazione risolvente si ottiene la forma ridotta

$$\left(1+4m^2\right)x^2-12m(4m-1)x+144m^2-72m=0, \qquad (2)$$

per la quale la condizione affinché abbia radici coincidenti è

$$\frac{\Delta}{4}=\left(6m(4m-1)\right)^2-\left(1+4m^2\right)\left(144m^2-72m\right)=0 \quad \text{che elaborata diventa}$$

$m(2-3m)=0$, le cui radici sono m_1=0, m_2=2/3 . Il primo valore rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente t_1, già individuata, la seconda retta tangente è

$t_2: y=\frac{2}{3}(x-6)+\frac{3}{2}$, cioè $t_2: 4x-6y-15=0$.

Punti di contatto delle tangenti condotte da P all'ellisse

Indicando con A il punto di contatto tra la tangente t_1 e l'ellisse si evince che coincide con il vertice V_3, dunque $A\left(0;\frac{3}{2}\right)$. Per il punto B si dovrebbe risolvere il sistema formato dall'equazione dell'ellisse e dall'equazione della tangente t_2; ma non è necessario rifare tutti i calcoli. Infatti, facendo riferimento all'equazione risolvente

$$\left(1+4m^2\right)x^2-12m(4m-1)x+144m^2-72m=0, \qquad (2)$$

è sufficiente sostituire in essa ad *m* il coefficiente angolare della retta t_2 e, poiché per tale valore le due radici dell'equazione coincidono e rappresentano proprio l'ascissa del punto di contatto richiesto, si ricava velocemente l'ascissa di B.

Con $m(t_2)=\frac{2}{3}$ la (2) diventa $\left(1+4\cdot\frac{4}{9}\right)x^2-12\cdot\frac{2}{3}\left(4\cdot\frac{2}{3}-1\right)x+144\cdot\frac{4}{9}-72\cdot\frac{2}{3}=0$,

da cui $25x^2-120x+144=0$, quindi $(5x-12)^2=0$, soddisfatta da $x=\frac{12}{5}$. L'ordinata di B si determina sostituendo il valore dell'ascissa nell'equazione della retta t_2. Si ha: $B\left(\frac{12}{5};-\frac{9}{10}\right)$

Area del triangolo APB

Assumendo come base per il triangolo il lato AP, la cui misura è $\overline{AP}=6$, l'altezza *h* relativa è data dalla distanza del punto B dalla retta AP, quindi

$$h=d(B;AP)=|y_P-y_B|=\left|\frac{3}{2}-\left(-\frac{9}{10}\right)\right|=\frac{12}{5}$$

Il valore dell'area del triangolo è: $S(APB)=\frac{1}{2}\cdot\overline{AP}\cdot h=\frac{36}{5}$

Q₃- La retta tangente all'ellisse in V_1 ha equazione x=3 e interseca la tangente t_1 nel punto H(3;3/2) e la tangente t_2 nel punto C(3;-1/2). Osserviamo che il quadrilatero ABCH, di cui si richiede l'area, è uno dei due poligoni in cui la retta *t* divide il triangolo APB. Possiamo ottenere l'area di ABCH come differenza tra l'area di APB e l'area del triangolo rettangolo PHC.

Poiché $\overline{HP}=x_P-x_H=3$ e $\overline{CH}=y_H-y_C=\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=2$, si ha

$$Area(PHC)=\frac{1}{2}\overline{HP}\cdot\overline{CH}=$$
$$\frac{1}{2}\cdot3\cdot2=3$$

L'area del quadrilatero ABCH è dunque

$$Area(ABCH)=$$
$$Area(APB)-Area(PHC)=$$
$$\frac{36}{5}-3=\frac{21}{5}$$

Q₄-La rappresentazione grafica di tutti gli elementi geometrici elaborati è in Figura 2.

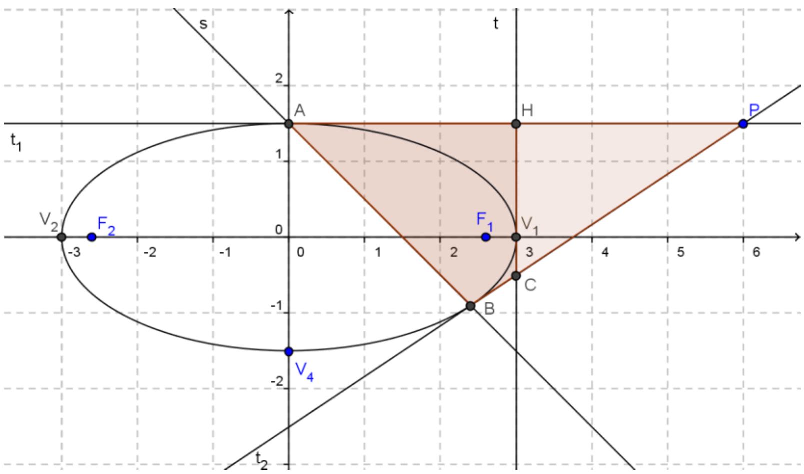

Figura 2