Geometria analitica della retta

Perpendicolarità, area di un triangolo

Problema

Considerata in un piano riferito ad un sistema di coordinate cartesiane xOy la retta r:x+2y-6=0 risolvere i quesiti che seguono.

a) Determinare il punto P appartenente ad r la cui ascissa supera di una unità il triplo dell'ordinata dello stesso punto.
b) Scrivere l'equazione della retta s perpendicolare ad r che passa per Q(2;4).
c) Determinare le coordinate del punto Q di intersezione delle due rette r, s.
d) Calcolare l'area e il perimetro del triangolo PHQ.
e) Rappresentare graficamente la figura con tutti gli elementi geometrici elaborati.

Elaborazioni

a) Il punto P deve avere coordinate (3α+1;α) e poiché deve appartenere alla retta r queste dovranno verificare l'equazione di r, dunque deve sussistere l'equazione

3α+1+2α-6=0, da cui α=1;

il punto è P(4;1).

b) Il coefficiente angolare della retta r è $m(r)=-\frac{1}{2}$, quindi, tenendo conto della condizione di perpendicolarità tra rette, il coefficiente angolare della retta s è $m(s)=-\frac{1}{m(r)}=2$. Utilizzando la forma esplicita dell'equazione del fascio proprio di rette di centro il punto Q(2;4) possiamo scrivere l'equazione della retta s. Si ha:

$$s: y-y_Q=m(s)(x-x_Q)\rightarrow y-4=2(x-2)\rightarrow s: y=2x$$

c) Si determinano le coordinate del punto H $\equiv$ r$\cap$s risolvendo il sistema formato dalle equazioni delle due rette. Si ha:

$$H:\begin{cases} r: x+2y-6=0 \\ s: y=2x \end{cases}\rightarrow\begin{cases} x+2\cdot 2x=6 \\ y=2x \end{cases}\rightarrow\begin{cases} x=\frac{6}{5} \\ y=\frac{12}{5} \end{cases}, \text{ quindi } H\left(\frac{6}{5};\frac{12}{5}\right)$$

d) Il triangolo PHQ è rettangolo nel vertice H, dunque per il valore dell'area si possono assumere le misure dei due cateti HP, HQ, uno dei quali funge da base e l'altro da altezza del triangolo. Risulta:

$$\overline{HP}=\sqrt{(x_P-x_H)^2+(y_P-y_H)^2}=\sqrt{\left(4-\frac{6}{5}\right)^2+\left(1-\frac{12}{5}\right)^2}=...=\frac{7}{5}\sqrt{5};$$

$$\overline{HQ}=\sqrt{\left(x_Q-x_H\right)^2+\left(y_Q-y_H\right)^2}=\sqrt{\left(2-\frac{6}{5}\right)^2+\left(4-\frac{12}{5}\right)^2}=\ldots=\frac{4}{5}\sqrt{5}$$

Il valore dell'area del triangolo è: $Area\left(PHQ\right)=\frac{1}{2}\cdot\overline{HP}\cdot\overline{HQ}=\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{5}\sqrt{5}\cdot\frac{4}{5}\sqrt{5}=\frac{14}{5}$

e) Segue la figura richiesta.