Esercizi sui luoghi geometrici nel piano cartesiano

Es3- In un rifermento cartesiano ortogonale xOy si considerino le rette r:x-y-2=0, s:3x+y-6=0.

Quesiti

a) Determinare su r ed s rispettivamente i punti P e Q aventi la stessa ascissa e tali che $\overline{PQ}=4$.
b) Riconosciuto che esistono due coppie di punti che verificano la proprietà indicata nel precedente quesito, classificare il quadrilatero convesso avente detti punti come vertici e determinare area e perimetro dello stesso.
c) Determinare le misure delle diagonali del quadrilatero di cui al punto precedente.
d) Realizzare la figura geometrica comprensiva di tutti gli elementi geometrici elaborati.

Elaborazioni

Premessa

Ricordiamo che nel piano cartesiano xOy, fissati i punti $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$, la distanza tra essi è

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}$$

*** ***

a) Scriviamo le equazioni delle due rette in forma esplicita.

$r: y=x-2$; $s: y=-3x+6$

I due punti P e Q, appartenenti rispettivamente alle rette r, s, avranno coordinate $P(\alpha;\alpha-2)$, $Q(\alpha;-3\alpha+6)$, con α parametro reale da determinare imponendo la condizione che risulti $\overline{PQ}=4$.

Poiché

$$\overline{PQ}=\sqrt{(x_P-x_Q)^2+(y_P-y_Q)^2}=|y_P-y_Q|=|\alpha-2-(-3\alpha+6)|=|4\alpha-8|$$

La condizione algebrica diventa

$|4\alpha-8|=4$, soddisfatta dai due valori $\alpha_1=1$, $\alpha_2=3$, per i quali si hanno rispettivamente le coppie di punti

$\alpha_1=1\rightarrow P_1(1;-1)$, $Q_1(1;3)$;

$\alpha_2=3\rightarrow P_2(3;1)$, $Q_2(3;-3)$.

b) Il quadrilatero convesso avente per vertici i punti P_1, Q_1, P_2, Q_2, è un parallelogramma perché i due lati P_1Q_1, P_2Q_2 sono congruenti e paralleli.

Area del quadrilatero

Considerando il parallelogramma sulla base $P_1 Q_1$, l'altezza h è la distanza tra le rette delle basi che hanno equazioni x=1, x=3, dunque h=2; pertanto si ha

$$Area\left(P_1Q_1P_2Q_2\right)=\overline{P_1Q_1}\cdot h=4\cdot 2=8$$

Perimetro del quadrilatero

Occorre trovare la misura dei lati congruenti Q_1P_2, P_1Q_2 . Si ha

$$\overline{Q_1P_2}=\sqrt{\left(x_{P_2}-x_{Q_1}\right)^2+\left(y_{P_2}-y_{Q_1}\right)^2}=\sqrt{(3-1)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{2}$$

$$perim\left(P_1Q_1P_2Q_2\right)=2\left(\overline{P_1Q_1}+\overline{Q_1P_2}\right)=2\left(4+2\sqrt{2}\right)=4\left(2+\sqrt{2}\right)$$

c) Misure delle diagonali del parallelogramma

$$\overline{P_1P_2}=\sqrt{\left(x_{P_2}-x_{P_1}\right)^2+\left(y_{P_2}-y_{P_1}\right)^2}=\sqrt{(3-1)^2+(1+1)^2}=2\sqrt{2}$$

$$\overline{Q_1Q_2}=\sqrt{\left(x_{Q_2}-x_{Q_1}\right)^2+\left(y_{Q_2}-y_{Q_1}\right)^2}=\sqrt{(3-1)^2+(-3-3)^2}=2\sqrt{10}$$

d) Segue la figura.