Proprietà del segmento parabolico

(Area del segmento parabolico e Teorema di Archimede)

Considerata la parabola $\gamma : y = ax^2$ e due suoi punti distinti $A\left(x_1; ax_1^2\right)$, $B\left(x_2; ax_2^2\right)$, la retta congiungente A e B determina con la parabola un segmento parabolico la cui area può essere determinata con il seguente

Teorema (detto di Archimede)

Considerata una parabola γ e due suoi punti A, B, l'area della regione finita di piano delimitata dalla corda AB e dalla parabola, detta segmento parabolico, è pari ai 2/3 dell'area del rettangolo i cui lati sono il segmento AB e l'altezza del segmento parabolico, definita come la distanza tra la retta [A;B] e la tangente alla parabola parallela ad [A;B].

Ritenuta come acquisita la tesi del precedente teorema, vogliamo qui provare che il segmento parabolico gode della seguente

Proprietà

L'area del segmento parabolico delimitato dalla corda AB, è pari ai 2/3 dell'area del triangolo delimitato dalla retta [A;B] e dalle due rette tangenti alla parabola nei punti A e B.

In relazione alla Figura 1 si ha

$$Area(Seg\_parab\_AB) = \frac{2}{3} Area(ABC)$$

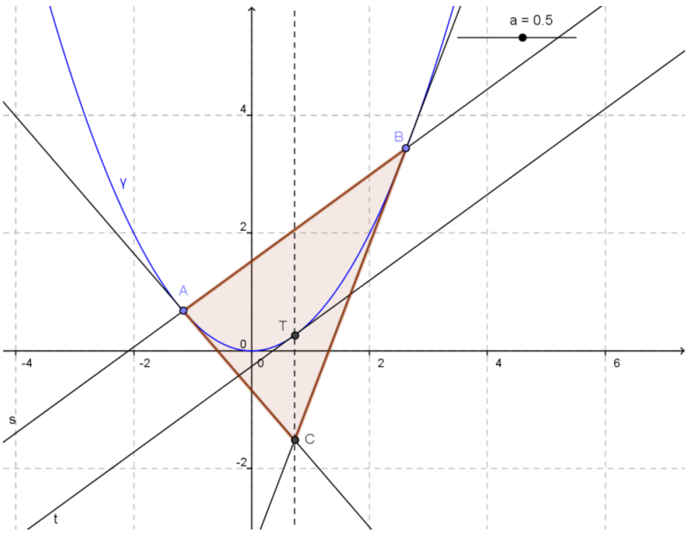

Figura 1

Osservazione_1

Una volta dimostrata la proprietà per la parabola $\gamma : y = ax^2$, la stessa sarà estensibile ad ogni parabola la cui equazione sia $\gamma' : y = ax^2 + bx + c$. Infatti, nel sistema di riferimento cartesiano xOy si può trasformare la parabola γ' nella corrispondente parabola γ'' avente il vertice nell'origine degli assi cartesiani, ottenuta sottoponendo la curva γ' alla traslazione che associa al vertice di γ' l'origine degli assi. La parabola γ'' avrà equazione $\gamma'' : y = ax^2$ e le sue proprietà metriche saranno le stesse di quelle della parabola γ', giacché la traslazione un'isometria[1].

***

Per dimostrare la proprietà indicata del segmento parabolico seguiremo il seguente percorso.

[1] Ricordiamo che una trasformazione (nel piano cartesiano in questo contesto) è definita isometria se trasforma una qualsiasi figura F in un'altra figura F′ congruente alla figura di partenza.

1) Determiniamo il coefficiente angolare della retta s=[A;B], quindi cercheremo l'equazione della retta *t* tangente alla parabola e parallela ad s.
2) Dopo aver trovato le coordinate del punto T di contatto tra la retta *t* e la parabola, calcoleremo l'altezza del segmento parabolico con la distanza di T da s. Determineremo la misura della corda AB (scopriremo l'importante proprietà che l'ascissa del punto T è uguale alla semisomma delle ascisse dei due punti A, B).
3) Applicando il teorema di Archimede troveremo il valore dell'area del segmento parabolico di base AB in funzione del parametro *a* e delle ascisse dei punti A, B.
4) Scriveremo le equazioni delle rette tangenti alla parabola nei punti A, B e determineremo le coordinate del loro punto di intersezione C.
5) Calcoleremo l'area del triangolo ABC sfruttando la formula del determinante del terzo ordine.
6) Faremo il confronto tra l'area del triangolo e quella del segmento parabolico.

Elaborazioni

1) Osservato che i punti A e B sono distinti e che hanno ascisse diverse, il coefficiente angolare della retta s=[A;B] è

$$m([A;B]) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{ax_2^2 - ax_1^2}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{x_2 - x_1} = a(x_2 + x_1) \qquad (1)$$

Per l'equazione della retta *t*, osserviamo che il suo coefficiente angolare è uguale a quello della retta s, essendo le stesse parallele; dunque l'equazione di *t*, nella forma esplicita, è del tipo

$$t: y = a(x_2 + x_1)x + k\,, \qquad (2)$$

con *k* parametro da determinare.

Valore di *k*- Per determinare il valore del parametro si deve impostare il sistema tra l'equazione della parabola e l'equazione della retta *t*, trovare l'equazione risolvente ed imporre che questa abbia radici coincidenti, cioè richiedere che il suo discriminante sia nullo; ciò equivale a richiedere che il sistema di equazioni ammetta una soluzione doppia e geometricamente significa che la retta e la parabola hanno due punti comuni coincidenti dove sono tangenti.

$\begin{cases} t: y = a(x_2 + x_1)x + k \\ \gamma: y = ax^2 \end{cases}$, l'equazione risolvente è

$$ax^2 - a(x_2 + x_1)x - k = 0 \qquad (3)$$

Il discriminante della (3) deve essere nullo, quindi

$\Delta = a^2(x_2 + x_1)^2 + 4ak = 0$, da cui, essendo $a \neq 0$, si ottiene

$$k = -\frac{1}{4}a(x_2 + x_1)^2 \qquad (3.1)$$

Equazione della retta tangente alla parabola

$$t: y = a(x_2 + x_1)x - \frac{1}{4}a(x_2 + x_1)^2 \qquad (2.1)$$

2) Coordinate del punto di contatto T tra la retta t e la parabola

L'ascissa di T è la soluzione (doppia) dell'equazione risolvente (3).

$$x_T = \frac{a(x_2+x_1)}{2a} = \frac{(x_2+x_1)}{2} \qquad (4)$$

L'ordinata di T si ottiene sostituendo l'ascissa nell'equazione della parabola. Dunque $T\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{a(x_1+x_2)^2}{4}\right)$.

Osservazione_2

Dall'espressione dell'ascissa del punto di contatto T si evince che questo punto ha la stessa ascissa del punto medio della corda AB della parabola.

Distanza di T dalla retta [A;B]

Scriviamo l'equazione della retta [A;B], come quella della retta passante per A e avente coefficiente angolare $m = a(x_1+x_2)$.

$$s: y - ax_1^2 = a(x_1+x_2)(x-x_1), \text{da cui } s: a(x_1+x_2)x - y - ax_1x_2 = 0 \qquad (5)$$

La distanza di T da *s* è

$$d(T;s) = \frac{\left|a(x_1+x_2)\frac{x_1+x_2}{2} - \frac{a(x_1+x_2)^2}{4} - ax_1x_2\right|}{\sqrt{a^2(x_1+x_2)^2+1}} = \ldots = \frac{|a|(x_2-x_1)^2}{4\sqrt{a^2(x_1+x_2)^2+1}} \qquad (6)$$

Misura della corda AB

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(ax_2^2-ax_1^2)^2} =$$
$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+a^2(x_2-x_1)^2(x_2+x_1)^2} = |x_2-x_1|\sqrt{1+a^2(x_2+x_1)^2} \qquad (7)$$

Area del rettangolo ABQP

(Vedere Figura 2)

$$Area(ABQP) = \overline{AB}\cdot d(T;s) = |x_2-x_1|\sqrt{1+a^2(x_2+x_1)^2}\cdot$$
$$\frac{|a|(x_2-x_1)^2}{4\sqrt{a^2(x_1+x_2)^2+1}} = \frac{1}{4}|a|(x_2-x_1)^3 \qquad (8)$$

3) Area del segmento parabolico

In virtù del teorema di Archimede l'area del segmento parabolico è i 2/3 dell'area del rettangolo ABQP. Dunque

$Area(Seg\_parab) = \frac{2}{3} Area(ABQP) =$

$$\frac{1}{6}|a||x_2 - x_1|^3 \qquad (9)$$

Osservazione_3

Dalla (9) deduciamo che l'area del segmento parabolico dipende esclusivamente dal valore del parametro (di apertura) a della parabola e dalla differenza tra le ascisse dei due punti estremi A, B che delimitano l'arco di parabola.

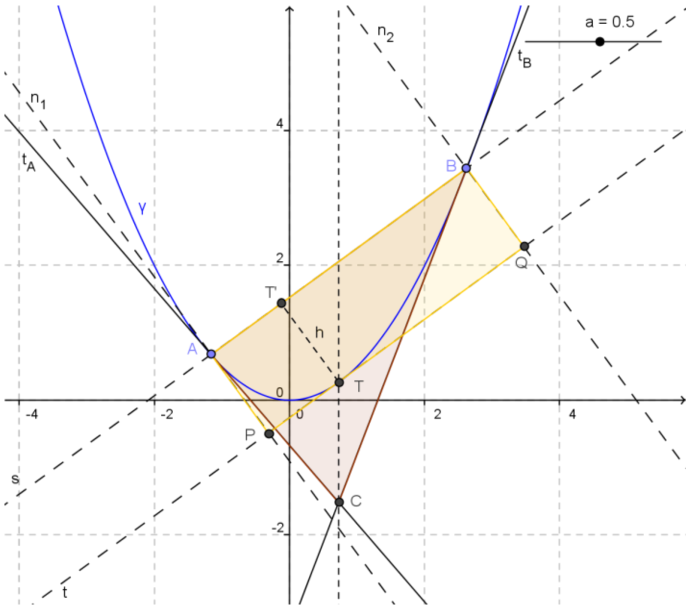

Figura 2-In figura è rappresentato il rettangolo ABQP di base AB e altezza la distanza del punto di contatto T dalla retta secante s. Il rettangolo ABQP e il triangolo ABC hanno la stessa area.

4) Equazioni delle rette tangenti nei punti A e B

Per ottenere le equazioni delle rette tangenti nei due estremi A e B, senza ricercarle con il metodo del fascio proprio di rette, ricordiamo che per la parabola avente equazione $y = ax^2 + bx + c$, il coefficiente angolare della retta tangente nel suo punto $P_0(x_0; y_0)$ è

$$m = 2ax_0 + b \qquad (10)^{(2)}$$

Tangente in A

$$t_A : y - ax_1^2 = 2ax_1(x - x_1), \text{ da cui } \quad t_A : y = 2ax_1x - ax_1^2 \qquad (11)$$

Tangente in B

$$t_B : y - ax_2^2 = 2ax_2(x - x_2), \text{ da cui } \quad t_B : y = 2ax_2x - ax_2^2 \qquad (12)$$

Punto C di intersezione delle due rette tangenti

Si deve risolvere il sistema formato con le equazioni delle due rette tangenti.

$$\begin{cases} t_A : y = 2ax_1x - ax_1^2 \\ t_B : y = 2ax_2x - ax_2^2 \end{cases}, \text{ il sistema ammette come soluzione } \begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y = ax_1x_2 \end{cases}.$$

Il punto di intersezione delle tangenti è $C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; ax_1x_2\right)$

(2) Il valore espresso dalla (10) si ottiene come applicazione del concetto di derivata prima di una funzione reale di variabile reale $y=f(x)$.

5) Area del triangolo ABC

Utilizzando il metodo del determinante si ha

$$Area(ABC) = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & ax_1^2 & 1 \\ x_2 & ax_2^2 & 1 \\ \frac{x_1+x_2}{2} & ax_1x_2 & 1 \end{vmatrix} \right| = \ldots = \frac{1}{4}|a||x_2 - x_1|^3 \qquad (13)$$

6) Confronto dell'area del triangolo ABC con quella del segmento parabolico

Dalla (13) si evince che l'area del triangolo ABC è uguale a quella del rettangolo ABQP e quindi, sempre per il teorema di Archimede, l'area del segmento parabolico di base AB può essere ottenuta come i 2/3 dell'area del triangolo ABC.

*** ***

Il teorema di Archimede con il calcolo integrale

Teorema

Considerata una parabola γ e due suoi punti A, B, l'area della regione finita di piano delimitata dalla corda AB e dalla parabola, detta segmento parabolico, è pari ai 2/3 dell'area del rettangolo i cui lati sono il segmento AB e l'altezza del segmento parabolico, definita come la distanza tra la retta [A;B] e la tangente alla parabola parallela ad [A;B].

Determiniamo l'area del segmento parabolico applicando la teoria degli integrali definiti.

Si deve determinare l'area della regione piana compresa tra la retta

$s: y = a(x_1 + x_2)x - ax_1x_2$ e la parabola $\gamma: y = ax^2$, limitatamente all'intervallo $[x_1; x_2]$.

Ci limitiamo a considerare il caso $a>0$ e con $x_1 < x_2$, lasciando il caso $a<0$ come utile esercizio per il lettore.

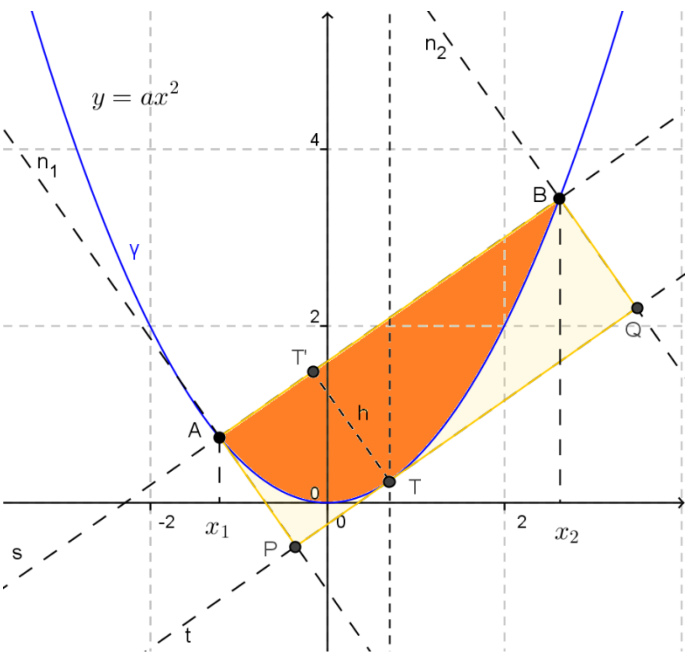

Figura 3- L'area del segmento parabolico è uguale ai 2/3 dell'area del rettangolo ABQP

Poiché nell'intervallo considerato il grafico della retta si trova al di sopra dell'arco della parabola, l'area della regione piana delimitata è il valore del seguente integrale definito

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(a\left(x_1+x_2\right)x-ax_1x_2-ax^2\right)dx=\left[a\left(x_1+x_2\right)\frac{x^2}{2}-ax_1x_2x-a\frac{x^3}{3}\right]_{x_1}^{x_2}=$$

$a\left(\left(x_1+x_2\right)\frac{x_2^2}{2}-x_1x_2^2-\frac{x_2^3}{3}\right)-a\left(\left(x_1+x_2\right)\frac{x_1^2}{2}-x_1^2x_2-\frac{x_1^3}{3}\right)=$(dopo alcune elaborazioni algebriche)= $\frac{1}{6}a\left(x_2-x_1\right)^3$

Evidentemente il valore ottenuto coincide con quello della (9).