Fascio di parabole

Doppio segmento parabolico e quadrato inscritto

Problema

Considerata nel piano cartesiano xOy l'equazione parametrica $kx^2-2kx-y-3k=0$, con k∈R, si affrontino i quesiti che seguono.

1) Determinare le equazioni delle curve generatrici del fascio, precisandone il tipo, e gli eventuali punti base.
2) Riconosciuto che per k≠0 si hanno delle parabole, determinare l'equazione del luogo geometrico descritto dai vertici delle parabole del fascio.
3) Determinare l'equazione della parabola γ del fascio avente il vertice di ordinata 4 e sia γ' la parabola simmetrica di γ rispetto all'asse delle ascisse.
4) Calcolare l'area della regione finita di piano R delimitata dalle parabole γ e γ' (doppio segmento parabolico).
5) Determinare le coordinate dei vertici del quadrato inscritto nella regione R avente i lati paralleli agli assi coordinati e trovare perimetro ed area del quadrato. Calcolare il rapporto tra l'area del quadrato e quella della regione R.
6) Realizzare una figura riepilogativa contenente tutti gli elementi geometrici elaborati.

Elaborazioni

1) Scriviamo l'equazione del fascio di curve raccogliendo i termini contenenti il parametro.

$$k\left(x^2-2x-3\right)-y=0$$

Le curve generatrici sono $g_1: x^2-2x-3=0$, $g_2: y=0$.

La curva g_1 è **la curva limite del fascio** e la sua equazione non può essere ottenuta per alcun valore del parametro. Notiamo che si può scrivere $g_1:(x+1)(x-3)=0$, quindi curva g_1 è composta dalla coppia di rette parallele aventi equazioni x+1=0, x-3=0.

Le due curve generatrici vengono considerate anche come le curve (parabole) degeneri del fascio.

Ricerca dei punti base

Le due curve generatrici hanno in comune i due punti A(-1;0), B(3;0) i quali sono comuni a tutte le altre curve del fascio, quindi rappresentano i punti base. Poiché i punti base sono distinti, le curve del fascio sono tra loro secanti.

2) Possiamo scrivere l'equazione del fascio nella forma $y=k\left(x^2-2x-3\right)$, oppure nella forma $y=kx^2-2kx-3k$, dalle quali emerge che con k≠0 si ottengono parabole aventi l'asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate.

Il vertice della generica parabola del fascio ha coordinate

$x_V = 1,\ y_V = -4k$, dunque $V(1;-4k)$. Il luogo descritto dal vertice V al variare di k nel campo dei reali è la retta r:x=1, asse di simmetria di tutte le parabole del fascio.

Osservazione sul luogo dei vertici

Se si considerano le parabole del fascio corrispondenti a k≠0, allora tra i punti del luogo decritto dai vertici delle parabole non è incluso il punto (1;0); se invece si include tra le parabole del fascio anche quella degenere che si ottiene per k=0, rappresentata dall'asse delle ascisse(y=0), allora entra a far parte del luogo descritto dai vertici anche il suddetto punto e quindi si completa la retta

3) Abbiamo precisato che il vertice della generica parabola del fascio è il punto $V(1;-4k)$; per ottenere la parabola γ deve risultare -4k=4, quindi k=-1. L'equazione della curva è $\gamma : y = -x^2 + 2x + 3$, con vertice V(1;4).

L'equazione della parabola γ ' simmetrica di γ rispetto all'asse delle ascisse si ottiene da quella di γ ponendo –y al posto di y; si ottiene: $\gamma' : y = x^2 - 2x - 3$, il cui vertice è V'(1;-4).

4) La regione finita di piano R delimitata dalle parabole γ, γ' è un doppio segmento parabolico; considerata la simmetria delle due parabole, l'area della regione R è pari al doppio dell'area del segmento parabolico determinato da ciascuna delle due parabole con l'asse delle ascisse. Risulta:

$$Area(R) = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \overline{AB} \cdot y_V = \frac{4}{3} \cdot (x_B - x_A) \cdot y_V = \frac{4}{3} \cdot 4 \cdot 4 = \frac{64}{3}$$

5) Sia s:y=h una retta che tagli in due punti distinti l'arco di γ nel semipiano delle ordinate positive, dunque con 0<h<4. Indichiamo con P e Q i due punti di intersezione di s con γ e con P', Q' rispettivamente i loro simmetrici rispetto all'asse delle ascisse, i quali dunque appartengono alla parabola γ'. Il rettangolo PQQ'P' è inscritto nella regione R. Si deve stabilire per quali valori del parametro reale h il rettangolo diventa un quadrato.

Strategia risolutiva

Impostiamo il sistema algebrico tra l'equazione della retta s e quella di γ e risolviamolo per cercare le coordinate dei punti P, Q; ciò fatto, sfruttando la simmetria della figura, troveremo le coordinate dei punti P', Q' e determineremo le misure dei segmenti PQ, PP'; imponendo che dette misure siano uguali si otterrà un'equazione nell'incognita h, dalla quale si troveranno i valori richiesti per il parametro.

$\begin{cases} s : y = h \\ \gamma : y = -x^2 + 2x + 3 \end{cases}$ da cui l'equazione $x^2 - 2x - 3 + h = 0$, soddisfatta da $x = 1 \pm \sqrt{4-h}$.

Si hanno i due punti: $P\left(1-\sqrt{4-h};h\right)$, $Q\left(1+\sqrt{4-h};h\right)$, con 0≤h≤4.

I punti simmetrici di P e Q rispetto all'asse x sono $P'\left(1-\sqrt{4-h};-h\right)$, $Q'\left(1+\sqrt{4-h};-h\right)$.

Risulta: $\overline{PQ} = x_Q - x_P = 2\sqrt{4-h}$; $\overline{\mathrm{PP'}} = y_P - y_{P'} = 2h$.

$\overline{PQ} = \overline{\mathrm{PP'}} \Leftrightarrow 2\sqrt{4-h} = 2h \rightarrow h^2 + h - 4 = 0$. L'equazione ammette come radici

$h_1 = -\dfrac{1+\sqrt{17}}{2} < 0$, che non può essere accettata; $h_2 = \dfrac{\sqrt{17}-1}{2} \in \left]0;4\right[$ è accettabile.

Sostituiamo il valore trovato per h nelle coordinate dei vertici del quadrato.

$$P\left(1-\sqrt{4-h};h\right) \rightarrow x_P = 1-\sqrt{4-\frac{\sqrt{17}-1}{2}} = 1-\sqrt{\frac{9-\sqrt{17}}{2}} = 1-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{9-\sqrt{17}} =$$
$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\sqrt{\frac{9+8}{2}}-\sqrt{\frac{9-8}{2}}\right) = 1-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3-\sqrt{17}}{2}$$

Quindi $P\left(\dfrac{3-\sqrt{17}}{2};\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$.

Procedendo in modo analogo si ricava $Q\left(\dfrac{1+\sqrt{17}}{2};\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$; i due punti simmetrici P′, Q′ sono

$P'\left(\dfrac{3-\sqrt{17}}{2};\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}\right)$, $Q'\left(\dfrac{1+\sqrt{17}}{2};\dfrac{1-\sqrt{17}}{2}\right)$.

Perimetro ed area del quadrato PQQ′P′

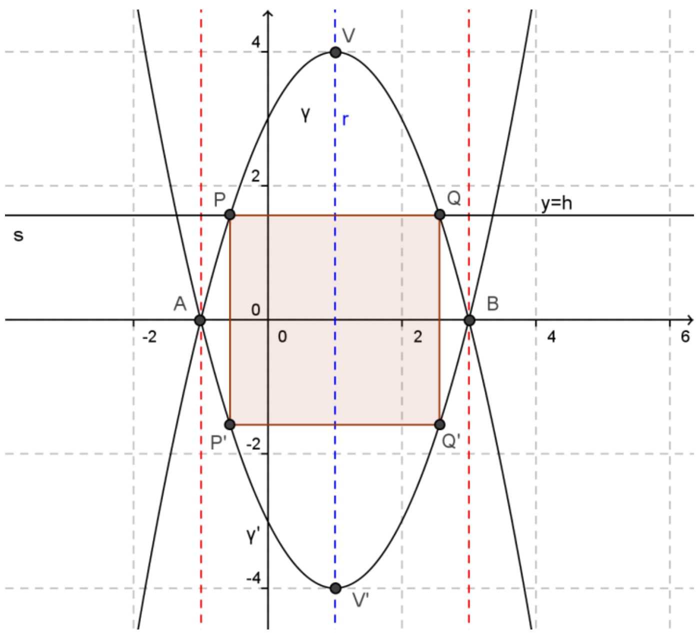
$\overline{PQ} = \overline{PP'} = 2y_P = \sqrt{17}-1 \rightarrow$

$Perim\left(PQQ'P'\right) =$
$4\overline{PQ} = 4\left(\sqrt{17}-1\right);$

$Area\left(PQQ'P'\right) = \overline{PP'}^2 =$
$\left(\sqrt{17}-1\right)^2 = 2\left(9-\sqrt{17}\right)$

Rapporto tra le aree

$$\frac{Area\left(PQQ'P'\right)}{Area\left(R\right)} = \frac{3\left(9-\sqrt{17}\right)}{32} \approx$$
$0,4572 = 45,72\%$



6) La figura riepilogativa è a margine.